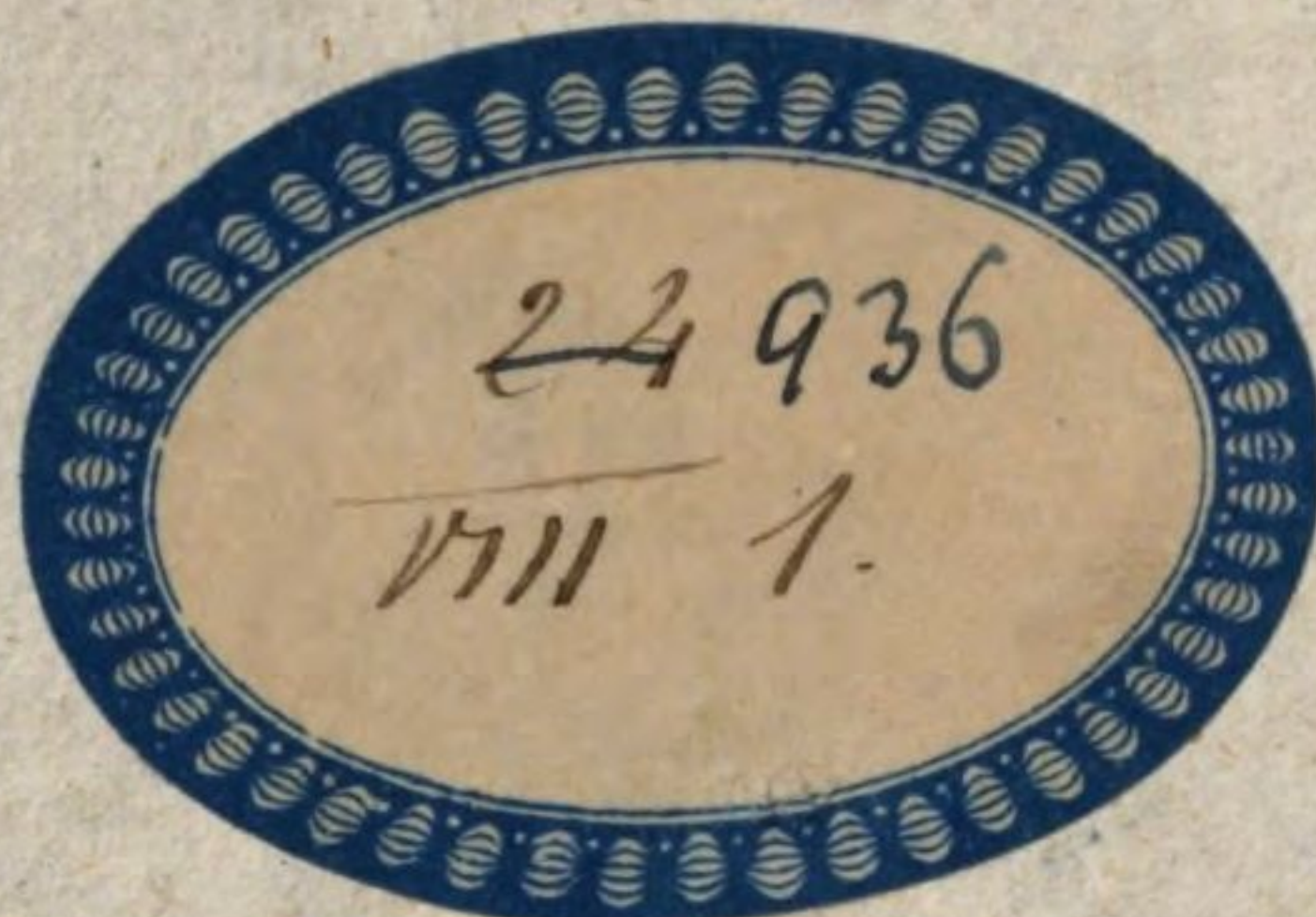


Philos.
5302
(1

Staatliche Bibliothek
Regensburg

Philos. 5302/1



VIII, 1

471
936

ISOMETRISCHE
PROJEKTIONSLEHRE
(PERSPECTIVE).

—
WISSENSCHAFTLICH BEGRÜNDET

UND

IN IHRER ANWENDUNG

AUF DAS

TECHNISCHE ZEICHNEN

ZUM

GEBRAUCHE AN SCHULEN,

SO WIE

ZUM SELBSTUNTERRICHTE BEARBEITET

VON

O. MOELLINGER.

[1.]

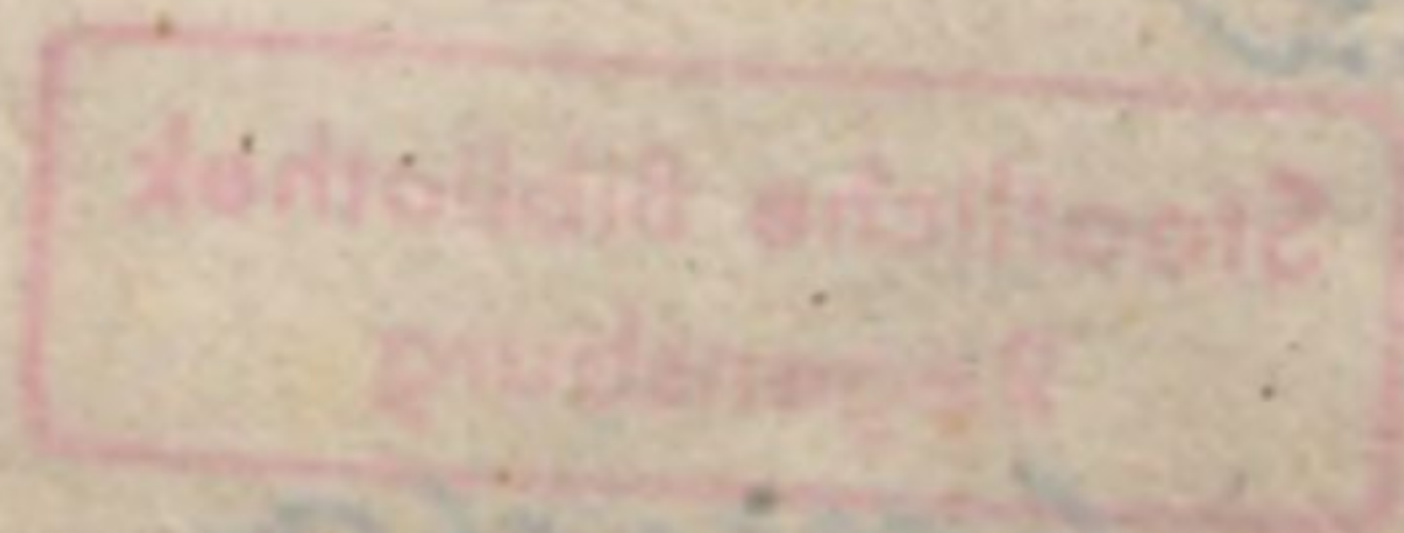
THEORETISCHER THEIL.



SOLOTHURN,

VERLAG VON JENT & GASSMANN.

1840.



PROJEKTIONSLEHRE
(PERSPECTIVE)
ISOMETRISCHE

WISSENSCHAFTLICH BEGRÜNDET
IN IHRER ANWENDUNG
TECHNISCHE ZEICHNEN
GEBRAUCHE AN SCHULEN
ZUM SEHRSTUNTERRICHT BEABZICHTET

O. MOELLINGER

THEORETISCHER THEIL



SOLOTHURN
VERLAG VON JENT & GASSMANN

1880

Lehrbuch

Staatliche Bibliothek
Regensburg
5.7966/650

VORREDE.

Obgleich eine wissenschaftliche Bearbeitung der zuerst von FARISCH angewandten und besonders zur Darstellung von Maschinen und Maschinentheilen empfohlenen *isometrischen Projektionsmethode* ein schon längst gehegter Wunsch ist *), und eine Darstellungsweise, welche mit dem Vortheile einer beliebigen perspektivischen Ansicht des Gegenstandes, wobei das Auge in unendlicher Entfernung gedacht wird, noch denjenigen vereinigt, dass alle Dimensionen des dargestellten Körpers entweder unmittelbar oder doch in wenigen Augenblicken bestimmt werden können, auf gleiche Weise als Bedürfniss des Architekten, des Ingenieurs, des Technikers und des Gewerbsmannes erscheint, so ist dennoch unter der

*) Siehe GEHLERS physikalisches Wörterbuch Bd. 7. Abthl. 1, Artikel: isometrische Perspektive von BBANDES.

grossen Anzahl von Werken, welche seit sieben Jahren über die konstruktiven Theile der ebenen und Raumgeometrie erschienen sind, mit meinem Wissen nicht ein einziges aufzuweisen, worin diese Projektionsmethode eine ihrem hohen wissenschaftlichen und praktischen Werthe entsprechende Berücksichtigung gefunden hätte. Fast möchte es scheinen, als habe man sich in dem wissenschaftlichen Verhältnisse, worin diese Projektionsmethode zu der räumlichen Konstruktionslehre (Geometrie descriptive) steht, nicht ganz zurecht finden können und dass einzig dieser Umstand die wissenschaftliche Begründung derselben so lange verzögert habe. Was mich in dieser Ansicht besonders bestärkt, ist das von Hr. GUIDO SCHREIBER, dem bekannten Verfasser des geometrischen Portfolio's *) auf S. 79 § 291 über diese Projektionsmethode ausgesprochene Urtheil: «Erheblichen Vortheil gegen die gewöhnliche schiefe Projektion können wir in dieser Anordnung nicht erblicken.» Freilich scheint, wie sich aus demselben Paragraphen ergibt, dieses Urtheil nicht aus Sachkenntniss hervorgegangen zu sein, indem der Verfasser nicht einmal vom Hauptprinzip der isometrischen Projektionsmethode rechten Gebrauch macht. Mag übrigens dem sein, wie ihm

*) Geometrisches Portfolio. *Die darstellende Geometrie und ihre Anwendungen*, herausgegeben von G. SCHREIBER, Professor der Mathematik und Vorstand des gesamten graphischen Unterrichtes an der polytechnischen Schule in Karlsruhe. Karlsruhe 1839. Th, Groos.

wolle, so viel ist gewiss, dass man die ausserordentliche Nützlichkeit und die vielseitige Anwendbarkeit der isometrischen Projektionsmethode noch nicht in der Weise erkannt hat, als dieses nach dem Studium des vorliegenden Werkes geschehen dürfte. Denn wenn auch nicht geläugnet werden kann, dass die Gestalt eines beliebigen Körpers durch seine senkrechten Hauptprojektionen und Durchschnitte vollkommen bestimmt wird, so sind diese, wie Jeder, welcher mit den Eigenschaften solcher Projektionen vertraut ist, aus Erfahrung weiss, in sehr vielen Fällen noch keineswegs ausreichend, indem ihnen eine der nothwendigsten Erfordernisse: *die Uebersicht des Zusammenhanges der dargestellten Linien und Flächen* fast gänzlich mangelt, so dass sie öfters nicht nur undeutlich, sondern selbst unverständlich sind. Dieser Uebelstand wird um so fühlbarer, je grösser die Anzahl der Theile ist, aus welchen das darzustellende Ganze besteht und je mehr sich diese Theile in den verschiedenen Hauptansichten bedecken. Hierin ist daher einzig und allein der Grund zu suchen, warum das geometrische Zeichnen auf wissenschaftlicher Basis an den Sekundarschulen und niederen technischen Lehranstalten bisher nur mit geringem Erfolge oder gar nicht gelehrt werden konnte *).

*) SCHREIBER sagt darüber in der Vorrede seines geometrischen Portfolios (Seite VII) folgendes:

Alle diese Nachteile werden von der isometrischen Projektionsmethode ausgeschlossen, während sie auf der

«Die gegenwärtige Bearbeitung des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie und alle, welche in ähnlicher Art gehalten sind, können nur für ein Publikum bestimmt sein, das zu einer *höhern wissenschaftlichen Bildung* bestimmt und dem jetzo schon mindestens die elementare Mathematik geläufig ist. Aber man hat solche Werke auch an niederen Gewerbschulen als Lehrbücher eingeführt oder sie von oberer Behörde dazu empfohlen und hierin einen *bedeutenden Missgriff* begangen. Denn die erste Abtheilung des Kurses, welche die Aufgabe über Ebenen und gerade Linien umfasst, ist weit schwieriger» (wahrlich nicht an sich!) «als die zweite, wo krummflächige Formen zur Betrachtung kommen, weil hier ein Gesetz der Stetigkeit herrscht, welches man bald erfasst hat, während dort oft verlangt wird, *fünf, sechs Ebenen und Linien in innerer Anschauung zu kombiniren*, indem jede einzelne, besonderen Bedingungen der Lage entsprechen soll. Stellt man solche Forderungen an Schüler, deren räumliche Anschauungskraft noch ungebildet ist, dann darf der üble Erfolg nicht befremden, und die Rückwirkung auf die Schule selbst kann nicht ausbleiben, wie denn auch die tägliche Erfahrung Belege hiezu liefert.»

Die von Hrn. SCHREIBER erwähnten Schwierigkeiten liegen indessen nicht sowohl in der Sache als in der Behandlungsweise des Gegenstandes; denn man hat sich verleiten lassen, die zur Auflösung rein wissenschaftlicher und allgemeiner Aufgaben befolgte Methode unzweckmässiger Weise auch auf die Auflösung spezieller und praktischer Aufgaben auszudehnen, und wurde hierdurch genöthigt, an die innere Anschauungskraft der Schüler solche Forderungen zu stellen, dass diese nur von reiferen, gebildeten und fähigen Leuten erfüllt werden können. Ein ganz anderes Resultat wird sich aber zeigen,

anderen Seite alle Vortheile der senkrechten und der polaren perspektivischen Projektionsmethode in sich vereinigt. Mit einer Leichtigkeit und Sicherheit, welche auf keinem anderen Wege möglich ist, stellt sie jeden gegebenen Körper dem Auge in jeder Richtung und nach jedem Durchschnitte dar, und ist im Stande, seine äussere Begränzung mit seiner inneren Einrichtung in einer und derselben Figur zu vereinigen.

Ihre ausserordentliche Nützlichkeit und praktische Wichtigkeit zur Darstellung der verschiedenen Holz- und Steinsysteme, so wie ganzer Gebäude, wird durch den zweiten Theil dieses Werkes (Isometrische Projektionslehre, angewandter Theil), so wie in der von mir herausgegebenen Uebersetzung von *Adhémar's* Lehre des Steinschnittes auf eine überzeugende Weise nachgewiesen werden.

Eine besonders nahe liegende Anwendung findet endlich diese Projektionsmethode in der *Schattenlehre*, indem sie nicht nur die *Gränzlinien der Schatten*, sondern auch die *Stärke der Beleuchtung* aller einzelnen Theile des vor-

wenn man statt der gewöhnlichen Methode eine solche wählt, welche an die innere Anschauungskraft *keine Forderungen* stellt, sondern dieser in jedem besondern Falle dadurch zu Hülfe kömmt, dass sie bei strenger Anwendung der Hauptprinzipien oder bei treuer Befolgung gegebener Grundregeln die Anschauung der räumlichen Grössen, welche den Inhalt der Aufgabe bilden, in ihrer gegenseitigen Lage durch sich *selbst* erzeugt.

liegenden Körpers mit einer überraschenden Leichtigkeit bestimmt und so eine Aufgabe löst, welche in allen mir bekannten Werken über die Schattenlehre unberücksichtigt gelassen wurde.

Was nun die Anlage dieses Werkes betrifft, so habe ich dieselbe so eingerichtet, dass die in ihm niedergelegten Resultate, auch denjenigen zugänglich sind, welche *keine mathematischen Vorkenntnisse* besitzen; dies war nur dadurch möglich, dass ich die Angabe der auszuführenden Konstruktionen von mathematischen Betrachtungen und Beweisführungen völlig frei hielt und von diesen scharf getrennt habe; dass hiedurch das Werk nichts an wissenschaftlichem Werthe verlieren konnte, ist wohl für sich klar. Es ist daher zum *allgemeinen Gebrauche* vollkommen geeignet.

Seine vorzüglichste Bestimmung möge die sein, die Lehre des geometrischen Zeichnens besonders dem *Gewerbstande* zugänglich und leicht verständlich zu machen, und somit einem Bedürfniss, welchem man bis jetzt nur innerhalb gewisser und zwar eng gezogener Gränzen zu entsprechen im Stande war, für alle Fälle Genüge zu leisten.

Sofothurn im März 1840.

DER VERFASSEN.

ISOMETRISCHE
PROJEKTIONSLEHRE.

ERSTER ABSCHNITT.

VORKENNTNISSE.

**ZUSAMMENSTELLUNG DER WICHTIGSTEN KONSTRUKTIONEN
IN DER EBENE.**

Verschiedene Bezeichnungsweise der Linien.

(Taf. 1, Fig. 1.)

Linien, welche *gegeben* sind, und Linien, welche *gefunden* sind, werden durch ununterbrochene Striche (ab und cd) dargestellt, und zwar die gegebenen Linien durch *feine* (ab), die gefundenen durch *kräftigere* Striche (cd). Zur *Erklärung* dienende oder *verdeckte* aber *vorhandene* Linien werden durch unterbrochene Striche (ef) bezeichnet. Linien, welche zur Auflösung der gegebenen Aufgaben gezogen werden müssen, oder die *Konstruktionslinien* werden durch abwechselnde Striche und Punkte bezeichnet, so dass ein oder zwei Punkte beständig mit einem Striche abwechseln (gh und ik).

Konstruktionen senkrechter Linien.

(Taf. 1, Fig. 2 — 5 c.)

Aufgabe. (Fig. 2.) Man soll in der Mitte einer gegebenen Linie ab eine Senkrechte errichten.

Auflösung. Man öffne den Zirkel beliebig, doch so weit, dass die Oeffnung grösser ist, als die Hälfte der gegebenen Linie, beschreibe aus den Endpunkten a und b über und unter der Linie Kreisbögen, und verbinde die Durchschnittspunkte d dieser Kreisbögen durch eine Gerade; diese wird alsdann durch die Mitte m der Linie ab gehen und zugleich auf dieser senkrecht stehen.

Aufgabe. (Fig. 3.) Es ist eine gerade Linie gegeben und auf dieser ein Punkt m . Man soll eine Linie konstruiren, welche auf der gegebenen Linie ab senkrecht steht und durch den Punkt m geht.

Auflösung. Man setze den Zirkel in m ein, beschreibe rechts und links mit einer beliebigen Oeffnung Kreisbögen, welche die gegebene Linie in den Punkten a und c durchschneiden, setze den Zirkel in diesen Durchschnittspunkten ein und beschreibe mit beliebiger Oeffnung über der Linie die Kreisbögen d . Verbindet man endlich den Durchschnittspunkt d mit dem gegebenen Punkte m , durch eine gerade Linie dm , so ist diese die verlangte Senkrechte.

Aufgabe. (Fig. 4.) Es ist eine gerade Linie ab gegeben und ausserhalb derselben ein Punkt m . Man soll von diesem auf die gegebene Linie eine Senkrechte fällen.

Auflösung. Man beschreibe aus m einen Bogen ab , setze in den Punkten a und b ein, beschreibe aus diesen mit beliebiger Oeffnung die Kreisbögen d und ziehe die Verbindungslinie md . Diese Verbindungslinie ist die verlangte Senkrechte.

Aufgabe. (Fig. 5 a , 5 b , 5 c.) Eine gerade Linie am ist gegeben. Man soll in dem Endpunkte m derselben eine Senkrechte errichten, ohne die Linie zu verlängern.

Erste Auflösung. (Fig. 5 a.) Man beschreibe aus m mit beliebiger Oeffnung den Bogen ab ; aus a mit derselben Oeffnung den Bogen mb ; aus b mit derselben Oeffnung den Bogen d , verbinde den Durchschnittspunkt a mit b durch die Linie abd und ziehe endlich die Linie dm , welche die gesuchte Senkrechte ist.

Zweite Auflösung. (Fig. 5 b.) Man wähle über der gegebenen Linie am einen beliebigen Punkt p , beschreibe aus diesem mit der Oeffnung pm einen Kreis, verbinde den Durchschnittspunkt a mit p durch eine Linie apd und ziehe endlich die Linie md ; diese ist die verlangte Senkrechte.

Dritte Auflösung. (Fig. 5 c.) Man trage von m nach 5 eine beliebige Linie $m1$, 5mal auf, beschreibe aus m mit $m3$ den Bogen $3d$, aus 4 mit einer Oeffnung $= m5$ einen zweiten Bogen und verbinde den Durchschnittspunkt d mit dem Punkte m durch die Linie md , welche die gesuchte Senkrechte ist.

Theilung der Linien.

(Taf. 1, Fig. 6 — Fig. 9.)

Aufgabe. (Fig. 6.) Eine gegebene Linie soll durch Probiren in zwei gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung. Dieselbe ist bei Betrachtung der Figur für sich klar.

Aufgabe. (Fig. 7.) Eine gegebene Linie soll durch Probiren in 3 gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung. Man öffne den Zirkel so weit, dass man überzeugt sein kann, die Oeffnung sei geringer als der dritte Theil, und trage diese Oeffnung 3mal auf; es wird

dann ein Rest $3b$ bleiben. Von diesem füge man zur ersten Oeffnung ungefähr den dritten Theil hinzu und trage diese zweite Oeffnung neuerdings 3mal auf; bleibt ein neuer Rest $3b$, so hat man die Oeffnung wieder um den dritten Theil desselben zu vergrössern, ff., bis kein Rest mehr bleibt; wäre die versuchte Oeffnung grösser als der dritte Theil, so hätte man von dieser den dritten Theil des in diesem Falle eintretenden Ueberschusses abzuziehen.

Fig. 8 zeigt die Theilung einer Linie in fünf gleiche Theile. Die Theilungsmethode ist dieselbe, wie bei Aufgabe Fig. 7.

Aufgabe. (Fig. 9.) Man soll eine oder eine beliebige Anzahl gegebener Linien aa , bb , cc zu gleicher Zeit auf geometrischem Wege in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile theilen, z. B. in 7.

Auflösung. Man ziehe eine unbestimmte Linie $o,7$, trage auf diese eine beliebige Oeffnung $o,1$ siebenmal auf, beschreibe aus o und 7 mit der Linie $o,7$ die Kreisbögen om und $7m$, und ziehe die Verbindungslinien om und $7m$. Nun nehme man die gegebenen Linien aa , bb , cc der Reihe nach in den Zirkel, beschreibe aus m die Kreisbögen aa , bb , cc , ziehe die Verbindungslinien aa , bb , cc und verbinde endlich die Theilungspunkte $1, 2, 3, 4, 5, 6$ durch Konstruktionslinien mit dem Punkte m ; dadurch wird eine jede der Linien aa , bb , cc zugleich in 7 gleiche Theile getheilt.

Zusatz. Sollte eine gegebene Linie in drei Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie die Zahlen 2, 3 und 5, so muss man dieselbe in $2 + 3 + 5 = 10$ gleiche Theile theilen; zwei davon bilden alsdann den ersten, drei den zweiten und die übrigen fünf den dritten gesuchten Theil.

Von der Theilung der Winkel und der Kreisbögen.

(Taf. 1, Fig. 10 — Fig. 11.)

Aufgabe. (Fig. 10.) Man soll einen gegebenen Winkel abc in zwei gleiche Theile theilen.

Auflösung. Man beschreibe aus b mit beliebiger Oeffnung einen Kreisbogen ac ; aus a und c beschreibe man mit derselben oder einer beliebigen anderen Oeffnung die Kreisbögen m und ziehe die Verbindungslinie mb ; diese theilt sowohl den gegebenen Winkel als den Bogen ac in zwei gleiche Theile.

Aufgabe. (Fig. 11.) Man soll einen gegebenen Winkel durch Probiren in 5 gleiche Theile theilen.

Auflösung. Man beschreibe aus b einen beliebigen Kreisbogen ($a'c'$ oder ac), öffne den Zirkel so weit, dass diese Oeffnung nahezu der 5te Theil des Kreisbogens ist, und trage dieselbe 5mal als Senne auf dem Kreisbogen ($a'c'$, oder ac) auf; wurde die Oeffnung grösser als der 5te Theil angenommen, so ergibt sich ein Ueberschuss $c'5$ (auf $a'c'$); wurde sie aber kleiner angenommen, ein Rest $c5$ (auf ac); im ersten Falle wird die Oeffnung nach dem Augenmaas um den 5ten Theil des Ueberschusses vermindert, im 2ten Falle um den 5ten Theil des Restes vermehrt; nach 3maligem Probiren höchstens wird man alsdann diejenige Oeffnung gefunden haben, welche sich auf dem Kreisbogen 5mal als Senne, ohne Ueberschuss und ohne Rest auftragen lässt.

Auftragung eines gegebenen Winkels.

(Taf. 1, Fig. 12.)

Aufgabe. (Fig. 12.) Man soll einen gegebenen Winkel BAC an eine gegebene Linie ba tragen, so dass der Scheitel in einen gegebenen Punkt a fällt.

Auflösung. Man beschreibe aus A mit beliebiger Oeffnung einen Bogen BC und mit derselben Oeffnung aus dem gegebenen Punkte a den unbestimmten Bogen bc. Nun nehme man die Senne BC in den Zirkel, beschreibe damit aus b den Bogen c und verbinde den Durchschnittspunkt c mit a b; der hierdurch entstehende Winkel bac ist alsdann dem gegebenen Winkel BAC gleich.

Konstruktion paralleler Linien.

(Taf. 1, Fig. 13 a — 13 d.)

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben und ausserhalb derselben ein Punkt m. Man soll durch diesen eine Linie legen, welche mit der gegebenen Linie aa' parallel ist.

Erste Auflösung. Fig. 13 a. Man setze den Zirkel in m ein und öffne denselben so weit, dass der mit der Oeffnung beschriebene Kreisbogen die gegebene Linie in einem Punkte a berührt. Nun wähle man einen zweiten entsprechenden Punkt a' beschreibe mit derselben Oeffnung einen Kreisbogen m' und ziehe von m an diesen die Berührungslinie mm'.

Zweite Auflösung. (Fig. 13 b.) Man beschreibe aus einem beliebigen Punkte a mit der Linie am einen Kreisbogen mc, beschreibe aus m mit derselben Oeffnung einen unbestimmten Kreisbogen ab, nehme die Senne mc in den Zirkel, beschreibe aus a den Bogen b und verbinde endlich den Durchschnittspunkt b mit dem gegebenen Punkte m. Diese Verbindungslinie ist die gesuchte Parallele.

Dritte Auflösung. (Fig. 13 c.) Man ziehe eine beliebige Linie ma (diese kann auch bloß gedacht werden), beschreibe mit dieser aus einem entsprechenden Punkte b einen Kreisbogen, nehme die Entfernung ab in den Zirkel, beschreibe mit dieser aus m den Kreisbogen c, und verbinde den

Durchschnittspunkt c mit dem Punkte m . Die Linie mc ist alsdann parallel mit ab .

Vierte Auflösung. (Fig. 13 d.) Man lege den längeren Schenkel eines rechten Winkels an ab ; an den kürzeren Schenkel desselben lege man ein Lineal, schiebe den Winkel so lange am Lineale hin, bis der längere Schenkel durch den gegebenen Punkt m geht, und ziehe nun die Linie mc .

Konstruktion der Dreiecke.

(Taf. 1, Fig. 14 — 18)

Aufgabe. (Fig. 14.) Die drei Seiten ab , bc und ac eines Dreiecks sind gegeben. Man soll das Dreieck selbst konstruiren.

Auflösung. Man ziehe eine unbestimmte Linie AB und trage auf diese eine der 3 Seiten, z. B. ab auf; nun nehme man der Reihe nach auch die beiden anderen Seiten in den Zirkel, beschreibe mit diesen aus den Endpunkten A und B Kreisbögen und verbinde endlich den Durchschnittspunkt C derselben mit den Endpunkten A und B .

Aufgabe. (Fig. 14.) Man soll ein Dreieck konstruiren, wenn zwei seiner Seiten, ab und ac , und der von ihnen eingeschlossene Winkel man gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe eine unbestimmte Linie AB , trage auf diese eine der gegebenen Linien, z. B. ab auf, lege an diese den gegebenen Winkel nam an, trage auf den noch unbestimmten Schenkel AC dieses Winkels die Linie ac , und verbinde endlich C mit B .

Aufgabe. (Fig. 14.) Man soll ein Dreieck konstruiren, wenn eine Seite desselben, z. B. ab und die beiden daranliegenden Winkel man und rbs gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe eine unbestimmte Linie AB , trage die gegebene Seite ab darauf und lege die gegebenen

Winkel so an dieselben, dass ihre Scheitel in die Punkte A und B fallen. Ihre Schenkel AC und BC werden sich alsdann in einem Punkte C durchschneiden, welcher nebst den Punkten A und B das verlangte Dreieck bestimmt.

Aufgabe. (Fig. 15.) Man soll ein gleichschenkliches Dreieck konstruiren, von dem die Grundlinie ab und einer seiner beiden Schenkel, z. B. ac gegeben sind.

Auflösung. Da in einem gleichschenkligen Dreiecke die beiden Schenkel gleich gross sind, so muss die Konstruktion dieselbe sein, als ob drei Seiten gegeben wären.

Aufgabe. (Fig. 16.) Man soll ein gleichseitiges Dreieck konstruiren, von dem die eine seiner drei Seiten (ab) gegeben ist.

Auflösung. Da die drei Seiten eines gleichseitigen Dreieckes gleich gross sind, so ist mit der Grösse der einen auch die der beiden übrigen gegeben und die Konstruktion aus der Figur für sich klar.

Aufgabe. (Fig. 17.) Es sind die beiden senkrecht aufeinander stehenden Seiten (Katheten) ab und bc eines rechtwinklichen Dreieckes gegeben. Man soll das Dreieck selbst konstruiren.

Auflösung. Man nehme AB gleich ab, errichte in dem Endpunkte B eine Senkrechte B2, trage auf diese die zweite Kathete bc von B nach C, und verbinde C mit A.

Aufgabe. (Fig. 18.) Man soll ein rechtwinkliches Dreieck konstruiren, wenn die Hypothenuse (ab) und eine seiner beiden Katheten (bc) gegeben sind.

Auflösung. Man nehme AB gleich ab, beschreibe über AB einen Halbkreis, setze den Zirkel in dem Punkte A oder B ein, beschreibe mit bc einen Kreisbogen und

verbinde den Durchschnittspunkt (C oder C') mit den Endpunkten A und B .

Konstruktion parallelogrammartiger Vierecke.

(Taf. 2, Fig. 19 — 22.)

Aufgabe. (Fig. 19.) Man soll ein Parallelogramm konstruiren, wenn zwei auf einander folgende Seiten (ab und ad) und der von diesen eingeschlossene Winkel nam gegeben sind.

Auflösung. Man nehme AB gleich ab , trage an AB den Winkel nam so an, dass der Scheitel desselben nach A fällt, mache den noch unbestimmten Schenkel AD gleich ad , beschreibe aus B mit ad , und aus D mit ab Kreisbögen und verbinde ihren Durchschnittspunkt C mit B und D .

Aufgabe. (Fig. 20.) Man soll ein Rhombus konstruiren, von dem eine Seite (ab) und einer seiner Winkel (man) gegeben sind.

Auflösung. Da das Rhombus ein Parallelogramm ist, dessen 4 Seiten gleich gross sind, so ist die Auflösung dieser Aufgabe wesentlich dieselbe, wie die der vorhergehenden.

Aufgabe. (Fig. 21.) Man soll ein Rechteck konstruiren, von dem zwei auf einander folgende Seiten (ab und bc) gegeben sind.

Auflösung. Dieselbe ergibt sich aus der Bemerkung, dass das Rechteck ein Parallelogramm ist, dessen Seiten senkrecht auf einander stehen.

Aufgabe. (Fig. 22.) Man soll über einer gegebenen Linie (AB) ein Quadrat konstruiren.

Auflösung. Dieselbe ergibt sich aus der Bemerkung, dass das Quadrat ein Parallelogramm ist, dessen Seiten

senkrecht auf einander stehen und gleich gross sind. In Bezug auf die Konstruktion der Senkrechten BC zeigt Fig. 22 folgende neue Methode: Man beschreibe aus B mit beliebiger Oeffnung einen Bogen am , aus a mit derselben Oeffnung einen Bogen Bb , welcher den ersten in einem Punkte b durchschneidet, theile den Bogen ab in zwei gleiche Theile, trage die Hälfte mb von b nach m' und ziehe endlich die Linie $m'B$.

Proportionallinien.

(Taf. 2, Fig. 23 a — 23 e.)

Aufgabe. (Fig. 23 a.) Man soll zu 3 gegebenen Linien ab , bc und ad die vierte Proportionallinie bestimmen, oder in andern Worten: Man soll eine Linie suchen, welche in der 3ten Linie gerade so oft enthalten ist, oder die dritte enthält, als die zweite in der erstern enthalten ist, oder diese enthält.

Auflösung. Man ziehe eine beliebige Linie AB , beschreibe aus A mit ab einen Bogen BC und aus B mit bc einen 2ten Bogen, welcher den ersten in C durchschneidet, ziehe die Linie AC , und beschreibe endlich aus A mit ad den Bogen DE ; die Senne DE ist alsdann die gesuchte 4te Proportionallinie.

Aufgabe. (Fig. 23 a und 23 b.) Man soll zu zwei gegebenen Linien ($a'b'$ und $a'd'$) die 3te Proportionallinie bestimmen, oder in anderen Worten: Man soll eine Linie suchen, welche in der 2ten Linie gerade so oft enthalten ist, oder dieselbe enthält, als diese in der ersten enthalten ist oder die erste enthält.

Erste Auflösung. (Fig. 23 a.) Man ziehe eine beliebige Linie AB , beschreibe aus A mit $a'b'$ einen Bogen BC und aus B mit $a'd'$ einen 2ten Bogen, welcher den

ersten in C durchschneidet, ziehe die Linie AC und beschreibe endlich aus A mit $a'd'$ den Bogen $D'E'$; die Senne $D'E'$ ist alsdann die gesuchte 3te Proportionallinie.

Zweite Auflösung. (Fig. 23b.) Man ziehe zwei unbestimmte Linien AD und AC' unter einem beliebigen Winkel, nehme AB gleich ab , trage ac durch den Bogen CC' von A nach C und C' und ziehe durch C' parallel mit BC die Linie C'D; die Linie AD ist alsdann die gesuchte 3te Proportionallinie.

Aufgabe. (Fig. 23e.) Zwei Linien ab und ac sind gegeben. Man soll ihre mittlere Proportionallinie bestimmen.

Erste Auflösung. Man ziehe eine unbestimmte Linie BC, nehme $AB = ab$, $AC = ac$, beschreibe über CB einen Halbkreis und errichte in A die Senkrechte AD; diese Linie ist zugleich die gesuchte mittlere Proportionallinie zwischen ac und ab , d. h. ac ist gerade so oft in AD enthalten, als AD in ab enthalten ist.

Zweite Auflösung. Man nehme $AB = ab$, beschreibe über AB einen Halbkreis, trage ac von A nach C', errichte in C' auf AB die Senkrechte C'D und ziehe die Linie AD; diese ist die gesuchte mittlere Proportionallinie.

Konstruktion ähnlicher Vielecke.

(Taf. 2, Fig. 24 — Fig. 25 d.)

Aufgabe. (Fig. 25 a — Fig. 25 c.) Man soll über einer gegebenen Linie ab ein Vieleck konstruiren, welches einem gegebenen, auf dem Papier dargestellten Vielecke ähnlich ist.

Erste Auflösung. Im Falle das gegebene Vieleck ABCDEF

zur Konstruktion selbst benützt werden kann, ziehe man aus C nach den Endpunkten A, F und E Diagonalen, trage die gegebene Seite, worüber das kleine Vieleck konstruiert werden soll, im Falle diese der Seite A B entspricht, von B nach a' , ziehe durch a' parallel mit B C die Linie $a a'$, durch a parallel mit A B die Linie $a b$, durch a parallel mit A F die Linie $a f$, durch f parallel mit F E die Linie $f e$, und durch E parallel mit E D die Linie $e d$. Hiedurch entsteht das Vieleck $a b C d e f a$, welches dem gegebenen Vielecke A B C D E F ähnlich ist.

Zweite Auflösung. (Fig. 25 a — Fig. 25 c.) Kann die Fläche, auf welcher sich das gegebene Vieleck befindet, nicht benützt werden, so konstruiert man sich einen Winkelmasstab (Fig. 25 b), und zwar auf folgende Weise: Man zieht eine unbestimmte Linie A 1, beschreibt aus A mit der Seite A B (Fig. 25 a), die mit 1 bezeichnet ist, einen Bogen 1 1', aus 1 mit A B (Fig. 25 c) den Bogen 1' und verbindet den Durchschnittspunkt 1' mit dem Punkte A. Der Winkel 1' A 1 bildet alsdann den zur Konstruktion des kleineren Vieleckes (Fig. 25 c) nöthigen Winkelmasstab. Man zerlege sofort das gegebene Vieleck (Fig. 25 a) durch Diagonalen in die Dreiecke A B C, A C F etc. und konstruiere (Fig. 25 c) eben so viele ähnliche und ähnlichliegende Dreiecke. Zur Konstruktion des Dreieckes A B C (Fig. 25 c), welches dem Dreiecke A B C (Fig. 25 a) ähnlich ist, beschreibe man aus A (Fig. 25 b) mit den Seiten A C und B C (Fig. 25 a) die Bögen 2,2 und 3,3, nehme die Sennen 2,2 und 3,3 dieser Bögen der Reihe nach in den Zirkel und beschreibe damit aus A und B (Fig. 25 e) Kreisbögen, welche sich in einem Punkte C durchschneiden.

Auf gleiche Weise verfährt man bei der Konstruktion der übrigen Dreiecke.

Aufgabe. (Fig. 25 d, Fig. 25 c und Fig. 24.) Man soll ein Vieleck konstruiren, welches einem sehr grossen Vielecke (z. B. auf dem Felde) ähnlich ist, wenn die Seiten des letzteren in Fussen gegeben sind, und die Seite A B (Fig. 25 c), über welcher das kleinere Vieleck konstruirt werden soll zu der entsprechenden des grösseren Vieleckes in einem bestimmten Verhältnisse, z. B. in dem von 1 : 1000 zu stehen hat.

Auflösung. Man konstruire sich, im Falle die Längeneinheit des Landes in 10 gleiche Theile getheilt wird, einen 10theiligen im Verhältnisse von 1 : 1000 verjüngten Massstab (Fig. 24), so dass also die Länge eines Fusses auf dem Massstabe, die Länge von 1000 Fuss, die Länge eines Zolles auf dem Massstabe, die Länge von 100 Fuss, die Länge einer Linie auf dem Massstabe, die Länge von 10 Fuss, und die einer Zehntellinie, die Länge von 1 Fuss in der Wirklichkeit vertritt. Die Konstruktion des Massstabes geschieht auf folgende Weise: Man zieht eine unbestimmte Linie 9 m, errichtet in 2 beliebigen, ziemlich entfernten Punkten senkrechte Linien m n und 9,10, trägt auf eine jede derselben eine entsprechende Zirkelöffnung 10mal auf, und verbindet die entsprechenden Theilungspunkte durch gerade Linien. Nun nimmt man die Länge eines Zolles (welche nach dem oben Gesagten diejenige von 100 Fuss vertritt) in den Zirkel, trägt diese von 9 nach m und von 10 nach n so vielmal auf, als es die Grösse des zu verkleinernden Vieleckes nöthig macht, und verbindet die gegenüberliegenden Theilungspunkte 0,0, 1,1, 2,2, 3,3 und 4,4 durch gerade Linien. Theilt man endlich sowohl die Linie 0,10 als die Linie 0,9 in 10 gleiche Theile und zieht man hierauf die Transversallinien 0,0, 1,1, 2,2, 3,3 etc., so ist der verjüngte Massstab fertig, und man darf den erhaltenen Theilungspunkten nur noch die in der Figur angegebenen Ziffern

beisetzen. Der Gebrauch desselben wird sich aus folgenden Beispielen ergeben. Um eine Länge von 200 Fuss abzugreifen, setzt man den Zirkel in dem Punkte 2 des Vertikalstriches 2,2 ein und öffnet ihn bis zu 0; um die Länge von 230 Fuss abzugreifen, setzt man den Zirkel gleichfalls in 2 ein und setzt der vorigen Oeffnung noch die Länge 0 3 hinzu; soll hingegen eine Länge von 236 Fuss abgetragen werden, so muss man den Zirkel gleichfalls in der vertikalen Linie 2,2 aber in demjenigen Punkte einsetzen, wo dieselbe von der durch den Punkt 6 gezogenen horizontalen Linie geschnitten wird; man öffnet alsdann den Zirkel zu dem Punkte *b*, welcher sich auf der durch die Punkte 3,3 gezogenen Transversallinie befindet.

Sollten 453 Fuss abgetragen werden, so hätte man den Zirkel in dem Durchschnittspunkte der Vertikalen 4,4 und der Horizontalen 3 einzusetzen und bis zu dem auf der Transversallinie 5,5 befindlichen Punkte *a* zu öffnen.

Soll eine Länge von 108 Fuss abgegriffen werden, so setzt man den Zirkel in dem Durchschnittspunkt der Vertikalen 1,1 und der Horizontalen 8 ein, und öffnet ihn bis zu dem auf der Transversallinie 0,0 befindlichen Punkte *c*.

Soll eine Länge von 369 Fuss abgegriffen werden, so setzt man den Zirkel in dem Durchschnittspunkte der Vertikalen 3,3 und der Horizontalen 9 ein und öffnet ihn bis zu dem auf der Transversallinie 6,6 befindlichen Punkte *d*.

Wie nun aus dem Croquis A B C D E (Fig. 25 d) des gegebenen Vieleckes das verkleinerte Vieleck A B C D E (Fig. 25 c) konstruirt wird, ergibt sich aus der blossen Anschauung der Figuren.

Konstruktion regelmässiger Vielecke.

(Taf. 2, Fig. 26 — Fig. 29 b.)

Aufgabe. (Fig. 26.) Man soll in einen gegebenen Kreis ein regelmässiges *Sechseck* konstruiren.

Auflösung. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser $0\ m\ 3$, setze den Zirkel in 0 ein, beschreibe mit dem Radius des Kreises den Bogen $1\ m\ 5$, setze in 1 ein, beschreibe den Bogen $m\ 2$, setze in 5 ein und beschreibe den Bogen $m\ 4$. Nun verbinde man die Theilungspunkte $0, 1, 2, 3, 4, 5$ durch gerade Linien.

Zusatz. Um ein regelmässiges Dreieck zu konstruiren, hat man den ersten Theilungspunkt mit dem dritten, diesen mit dem fünften und diesen mit dem ersten zu verbinden.

Aufgabe. (Fig. 27.) Man soll in einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Viereck konstruiren oder den Kreisumfang in 4 gleiche Theile theilen.

Auflösung. Man ziehe einen Durchmesser $0,4$, errichte in der Mitte desselben eine Senkrechte $2,6$ und verbinde die aufeinanderfolgenden Punkte $0, 2, 4, 6$, in welchen der Kreis von diesen beiden Linien durchschnitten wird, durch gerade Linien.

Zusatz. Hat man den Kreis in 4 gleiche Theile getheilt, so darf man, um den Umfang in 8 gleiche Theile zu theilen, nur ein jedes Viertheil des Kreisumfangs von Neuem in 2 gleiche Theile theilen; durch die Verbindung der Theilungspunkte ergibt sich das regelmässige Achteck.

Aufgabe. (Fig. 28.) Man soll in einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Fünfeck beschreiben.

Erste Auflösung. Man ziehe einen Durchmesser af , errichte in der Mitte desselben eine Senkrechte ma' , theile den Viertelskreis aa' durch *Probieren* in 5 gleiche Theile, und ziehe die Senne ab , welche dem aus 4 solcher Theile bestehenden Bogen entspricht; diese Senne ist eine Seite des regelmässigen Fünfecks, und kann nun von b nach c , von c nach d , und von a nach e getragen werden.

Zusatz. Es ist begreiflich, dass die Linien $a2$ und $2b$ zwei Seiten des in demselben Kreis eingeschriebenen regelmässigen Zehneckes, die Linien $a,1$, $1,2$, $2,3$, $3b$ hingegen die Seiten eines regelmässigen Zwanzigeckes sein müssen.

Zweite Auflösung. (Fig. 28.) Man ziehe einen Durchmesser af , errichte in der Mitte desselben eine Senkrechte ma' , halbire den Radius am in g , beschreibe aus g mit ga' den Bogen $a'b'$ und ziehe die Senne $a'b'$; diese ist die Seite des regelmässigen Fünfeckes.

Aufgabe. (Fig. 29 a.) Man soll über einer gegebenen Linie ab ein regelmässiges Vieleck von bestimmter Seitenanzahl konstruiren, z. B. ein regelmässiges Fünfeck.

Auflösung. Man beschreibe mit einer beliebigen etwas grossen Oeffnung ma' einen Viertelskreis $a'5$, theile diesen in 5 Theile, ziehe die Seite $a'4$ des zu diesem Hilfskreis gehörenden regelmässigen Fünfeckes, trage auf $a'4$ von a' nach b' die gegebene Seite ab , ziehe $b'b$ parallel mit $a'm$ bis zur Durchschneidung mit $m4$, lege durch b parallel mit $b'a'$ die Linie ba , beschreibe mit ma oder mb einen Kreis und trage endlich die Linie ab von b nach c , von c nach d und von a nach e .

Aufgabe. (Fig. 29 b.) Man soll unmittelbar über einer

gegebenen Linie $m n$ ein regelmässiges Vieleck, z. B. ein regelmässiges Fünfeck konstruiren.

Auflösung. Man beschreibe aus m mit $m n$ einen Halbkreis $n s r$, theile die Hälfte desselben, wie oben gezeigt wurde, in 5 gleiche Theile, nehme den Bogen $r s = 4$ solcher Theile, theile den Bogen $s n$ durch die Linie $m o$ in zwei gleiche Theile, errichte in der Mitte von $m n$ eine Senkrechte, beschreibe aus dem Punkte M , in welchem diese die Linie $m o$ durchschneidet, mit $M m$ oder $M n$ einen Kreis, und trage endlich $m n$, von m nach s , von s nach r und von n nach q .

(Taf. 3, Fig. 30.)

Aufgabe. (Fig. 30.) Es ist ein Kreis gegeben. Man soll um denselben ein regelmässiges Vieleck, z. B. ein Viereck konstruiren.

Auflösung. Man bestimme die Seite $(b'c')$ eines in den Kreis beschriebenen regelmässigen Vieleckes von derselben Seitenanzahl, fälle auf diese von dem Mittelpunkte m eine Senkrechte $m n o$, ziehe durch n , wo diese den Kreis durchschneidet, mit $b'c'$ eine Parallele $b c$ bis zur Durchschneidung mit den Linien $m b'$ und $m c'$, beschreibe mit $m b$ oder mit $m c$ einen Kreis und trage endlich die Seite $b c$ von b nach a und von c nach d . Es ist begreiflich, dass für diese spezielle Aufgabe die Punkte a und d auf den Verlängerungen der Linien $c m$ und $b m$ liegen müssen.

Aufgaben über den Kreis.

(Taf. 3, Fig. 31 — Fig. 43.)

Aufgabe. (Fig. 31.) Man soll durch 3 gegebene Punkte a, b und c einen Kreis legen, oder auch:

Man soll von einem gegebenen Kreise den verlorenen Mittelpunkt bestimmen.

Auflösung. Man errichte in der Mitte von ab die Senkrechte 1,2 und in der Mitte von bc die Senkrechte 1'2'; der Punkt (m), in welchem sich diese Senkrechten durchschneiden, ist alsdann zugleich der Mittelpunkt des Kreises.

Aufgabe. (Fig. 32.) Ein Dreieck abc ist gegeben. Man soll in dasselbe einen Kreis konstruiren, welcher die 3 Seiten berührt.

Auflösung. Man beschreibe aus a und b mit beliebiger Oeffnung die Kreisbögen 1,2 und 1'2', und theile dieselben in 2 gleiche Theile; der Punkt m , in welchem sich die Halbirungslinien bo und ao' durchschneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, während der Halbmesser desselben dadurch bestimmt wird, dass man auf eine der drei Seiten des Dreiecks, z. B. auf ab , von m aus eine Senkrechte (mn) fällt.

Aufgabe. (Fig. 33.) Man soll einen Winkel halbiren, wenn die Lage seines Scheitelpunktes unbekannt ist.

Auflösung. Die gegebenen Schenkel seien am und $a'm$. Man beschreibe aus 2 beliebig gewählten Punkten mm einer jeden Linie mit einer beliebigen aber entsprechenden Oeffnung mn 4 Kreisbögen, und ziehe sofort zwei gerade Linien ns und hs , welche je zwei dieser Kreisbögen berühren; dadurch entsteht ein neuer Winkel hsn , den man nun auf die bekannte Weise halbirt, indem die Halbirungslinie sM dieses Winkels zugleich diejenige des gegebenen Winkels sein wird.

Aufgabe. (Fig. 33.) Zwei gerade Linien ma und ma' sollen durch einen Kreisbogen mit einander verbunden werden, welcher bei einem gegebenen Punkte a beginnt.

Auflösung. Man halbire den Winkel, welchen diese Linien mit einander bilden, auf die eben gezeigte Weise,

errichte in dem Punkte a auf ma die Senkrechte af und beschreibe mit dieser einen Kreisbogen aa' ; den zweiten Berührungspunkt a' findet man dadurch, dass man von f auf $a'm$ die Senkrechte fa' fällt.

Aufgabe. (Fig. 33.) Es ist ein Winkel $h s n$ und auf der Halbirungslinie desselben ein Punkt A gegeben. Man soll diejenigen Kreise konstruiren, welche die Schenkel des Winkels berühren und zugleich durch den gegebenen Punkt A gehen.

Auflösung. Man errichte in A auf der Halbirungslinie $s M$ die Senkrechte AB , theile die hiedurch entstandenen Winkel ABs und ABC durch die Linien BM und BM'' in zwei gleiche Theile, und beschreibe endlich mit den Linien $M'A$ und MA Kreise; diese werden die beiden Schenkel des Winkel berühren.

Zusatz. Sollte ein Kreis M' konstruirt werden, welcher einen gegebenen Kreis M in dem auf der Halbirungslinie befindlichen Punkte A' berühren sollte, so müsste man auf ganz gleiche Weise verfahren, nämlich in A' auf $s A'$ die Senkrechte $A'B'$ errichten, $B'A'$ von B' nach C' tragen, und den Winkel $C'B'A'$ durch die Linie $B'M'$ halbiren; der Punkt C' ist zugleich der Punkt, in welchem der Schenkel $s C'$ von dem aus M' beschriebenen Kreise berührt wird. Durch die Schraffirung soll der gegebene Winkel zugleich als die Hälfte eines Giebelfeldes dargestellt werden.

Aufgabe. (Fig. 34.) Ein Kreis ist gegeben. Man soll eine Linie konstruiren, welche denselben in einem gegebenen Punkte (a oder a') berührt.

Erste Auflösung. Man ziehe zu dem gegebenen Punkte (a) vom Mittelpunkte einen Halbmesser Ma und errichte

in dem Endpunkte desselben eine Senkrechte $a'2$, so ist diese die verlangte Berührungslinie (Tangente).

Zweite Auflösung Man ziehe zu dem gegebenen Punkte a' den Halbmesser Ma' , verlängere diesen nach m , so dass $a'm = Ma'$ ist, beschreibe aus M und m mit entsprechender Oeffnung Kreisbögen und ziehe die Verbindungslinie $2a'$; diese steht auf Ma' senkrecht und berührt den Kreis in a' .

Aufgabe. (Fig. 35.) Es ist ein Kreis gegeben und ausserhalb desselben ein Punkt a . Man soll von diesem zwei Tangenten an den Kreis ziehen und die Berührungspunkte b und c bestimmen.

Auflösung. Man verbinde a mit dem Mittelpunkte M des Kreises, beschreibe über der Verbindungslinie aM einen Kreis und ziehe von a nach den Durchschnittspunkten b und c der beiden Kreise die Linien ab und ac ; diese müssen den gegebenen Kreis in b und c berühren.

Aufgabe. (Fig. 36 a.) Es ist ein Kreis Ma gegeben und auf diesem ein Punkt a . Man soll einen Kreis konstruiren, der einen bestimmten Radius ma besitzt und den gegebenen Kreis in a mit konvexer Seite berührt.

Auflösung. Man ziehe die Linie Ma , trage auf die Verlängerung derselben den gegebenen Radius am auf und beschreibe sofort mit am selbst einen Kreis.

Aufgabe. (Fig. 36 b.) Die Bedingungen sind dieselben wie die der vorhergehenden Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, dass der gesuchte Kreis den gegebenen mit konkaver Seite berühren soll.

Auflösung. Dieselbe geht aus der Figur hervor.

Aufgabe. (Fig. 37.) Es sind zwei Kreise M und m gegeben. Man soll diese durch gerade Linien auf alle mögliche Weisen vereinigen.

Auflösung. Man verbinde die Mittelpunkte M und m , trage den Radius mr des kleineren Kreises von m' nach r' und nach r'' , beschreibe mit den Linien Mr' und Mr'' Hilfskreise, ziehe an diese von dem Mittelpunkte m des kleinen Kreises Tangenten $m2$ und $m1$, verbinde den Mittelpunkt M mit den Punkten $2,2$ und $1,1$ durch die Radien $M2$ und $M1$, trage die Linie $1m$ von den Punkten b nach c , die Linie $2m$ von den Punkten b' nach c' und ziehe endlich die Verbindungslinien bc , $b'c'$ und $b'c'$, $b'c'$. Diese berühren die gegebenen Kreise in den Punkten bb , cc , $b'b'$, $c'c'$.

Aufgabe. (Fig. 38.) Es ist ein Kreis M und eine gerade Linie $b'm'$ gegeben. Man soll einen Kreis konstruiren, der beide berührt und einen bestimmten Radius mr besitzt.

Auflösung. Man ziehe aus M einen beliebigen Halbmesser Mm' , trage auf die Verlängerung desselben den gegebenen Radius mr von m' nach r' , beschreibe mit der Linie Mr' den Kreisbogen $r'M'$, ziehe sodann mit der gegebenen Linie $m''b'$ in der Entfernung $m''r''$, welche $= mr$ ist, eine Parallele $r''M$ und beschreibe endlich aus dem Durchschnittspunkte (M) des Hilfskreises und der Parallelen mit dem Radius mr einen Kreis. Dieser wird die gegebene Linie in dem Punkte b' und den gegebenen Kreis in dem Punkte b berühren; wie diese Berührungspunkte bestimmt werden, ergibt sich aus der Figur.

Aufgabe. (Fig. 39.) Es ist ein Kreis M und eine gerade Linie ab' gegeben. Man soll einen Kreis konstruiren, der beide berührt, und zwar den Kreis M in einem gegebenen Punkte b .

Auflösung. Man lege durch b an den Kreis M die Tangente ba , theile den hiedurch entstehenden Winkel bab' in zwei gleiche Theile, und beschreibe aus dem Punkte M' , in welchem die Halbirungslinie ad die Verlängerung des Halbmessers Mb durchschneidet, mit der Linie $M'b$ einen Kreis. Dieser berührt den Kreis M in dem Punkte b und die Linie ab' in dem Punkte b' ; um den letzteren zu erhalten, darf man nur von M auf ab' die Senkrechte $M'b'$ fallen.

Aufgabe. (Fig. 40.) Es ist ein Kreis M und eine gerade Linie ac gegeben. Man soll einen Kreis M'' konstruiren, der beide berührt und zwar die gerade Linie in einem gegebenen Punkte b' .

Auflösung. Man errichte in b' auf ac die Senkrechte $b'M''$, trage auf die Verlängerung derselben von b' nach r' den Radius bM des gegebenen Kreises, ziehe die Verbindungslinie $r'M$, errichte in der Mitte derselben die Senkrechte dM'' , und beschreibe nun mit $M''b'$ einen Kreis; dieser berührt die gegebene Linie in dem Punkte b' und den gegebenen Kreis in dem Punkte b ; letzterer wird dadurch erhalten, dass man die Linie $M''M$ zieht.

Aufgabe. (Fig. 40.) Es sind zwei Kreise M und M' gegeben. Man soll einen Kreis konstruiren, der beide berührt und dessen Mittelpunkt M'' auf der Verlängerung eines gegebenen Halbmessers $b'M'$ liegt.

Auflösung. Man trage bM von b' nach r , ziehe $r'M$ und vollende die Konstruktion wie oben.

Aufgabe. (Fig. 41.) Es sind zwei parallele Linien cd und $c'd'$ und auf diesen die Punkte d' und d gegeben. Man soll zwei Kreisbögen konstruiren, welche sich berühren und zugleich die gegebenen Linien in den Punkten d und d' durchschneiden.

Auflösung. Man ziehe die Verbindungslinie dd' , halbiere dieselbe in m , errichte in der Mitte von md' die Senkrechte $1,1'$ und in der Mitte von md die Senkrechte $2,2'$. Auf diesen Senkrechten befinden nun sich die Mittelpunkte unendlich vieler Kreise, wovon immer je 2 und 2, welche gleiche Halbmesser besitzen, die in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen erfüllen; zwei solcher Kreise sind die, welche in Fig. 41 aus den Punkten M und M' und zwei andere die, welche aus N und N' beschrieben sind. Der Punkt N' ist in der Figur nicht mehr angezeigt, weil er ausserhalb der Grenzen der Tafel liegt.

Durch die in Fig. 41 ausgeführte Schraffirung ist diese Konstruktion zugleich als das, bei den Säulenordnungen unter dem Namen von *Karnies* vorkommende architektonische Glied bezeichnet.

Aufgabe. (Fig. 42.) Es sind zwei parallele Linien b und b' und auf ihnen die Punkte b und b' gegeben. Man soll zwei Kreisbögen konstruiren, welche sich, und die gegebenen Parallelen in den Punkten b und b' berühren.

Auflösung. Man errichte in b und b' auf den gegebenen Linien die Senkrechten bM und $b'M'$ ziehe die Verbindungslinie bb' , halbiere dieselbe in m , errichte in der Mitte von bm die Senkrechte $2,2'$, trage die Linie bM von b' nach M' und beschreibe endlich aus M und M' mit $Mb = M'b'$ die Kreisbögen bm und $b'm$; diese berühren sowohl die gegebenen Linien in den Punkten b und b' als auch sich selbst in dem Punkte m .

Auch diese Konstruktion wurde durch Schraffirung als ein, gleichfalls unter dem Namen *Karnies* bekanntes architektonisches Glied bezeichnet.

Aufgabe. (Fig. 43.) Man soll eine gedrückte Gewölb-
linie konstruiren, wenn die Breite ab derselben und die
Höhe mc' gegeben sind, und letztere grösser als der 4te
Theil der Breite ab ist.

Auflösung. Man trage die Höhe mc' von m nach c ,
und die Linie bc von c' nach b , ziehe die Verbindungs-
linie bc , errichte in der Mitte derselben die Senkrechte
 $1M$, ziehe die Linie Mcd , trage mc von m nach c'' ,
ziehe $Mc''d'$ und beschreibe endlich aus c und c'' mit cb
oder $c''a$ die Kreisbögen bd und ad' und aus M mit
 Md oder Md' den Kreisbogen $d'c'd$. Auf gleiche Weise
kann diese Konstruktion auch unterhalb der Linie ab
ausgeführt werden, wodurch man ein ziemlich gutes
Oval erhält.

Konstruktion einer Ellipse und ihrer Tangenten.

(Taf. 3, Fig. 44.)

Entstehung der Ellipse. Eine Ellipse entsteht, wenn
sich ein Punkt, z. B. t , in einer Ebene so bewegt, dass die
Summe seiner Entfernungen von 2 festen Punkten f und f' ,
welche in derselben Ebene liegen, beständig dieselbe bleibt.
Wären daher die Punkte f und f' zwei Stifte und die
Linie $f'f'$, t eine dünne Schnur, welche bei t ein Blei-
stift umschliesst, so würde die Spitze des letzteren bei seiner
Bewegung um die Stifte f und f' nothwendig eine Ellipse
beschreiben müssen.

Die Punkte f und f' nennt man die *Brennpunkte* der
Ellipse, die Linien ft und $f't$ *Fahrstrahlen* oder *Radien-
vektoren*, den Durchmesser AB , welcher durch die Brenn-
punkte gezogen ist, die *grosse Axe* der Ellipse, und den
Durchmesser ab , welcher auf der grossen Axe in der
Mitte M senkrecht steht, die *kleine Axe*.

Aufgabe. Die grosse Axe AB und die kleine Axe ab einer Ellipse sind gegeben. Man soll 1) die Brennpunkte f und f' derselben bestimmen und 2) die Ellipse selbst konstruiren.

Auflösung. 1) Bestimmung der Brennpunkte. Man nehme die Hälfte der grossen Axe, also MA oder MB in den Zirkel und beschreibe aus a oder aus b einen Kreisbogen, welcher die grosse Axe in 2 Punkten f und f' durchschneidet. Diese Punkte sind die Brennpunkte.

2) Konstruktion der Ellipse. Man öffne den Zirkel beliebig, aber wenigstens so weit, dass die Oeffnung grösser als Bf' oder Af ist, beschreibe aus den Punkten f und f' die Kreisbögen 1,1, trage dieselbe Oeffnung von B nach 1, nehme die Linie $1A$ in den Zirkel und beschreibe aus f und f' ober- und unterhalb von AB zwei neue Kreisbögen, welche die zuerst beschriebenen in den Punkten 1,1,1,1 durchschneiden. Diese Punkte sind zugleich 4 Punkte der Ellipse. Um 4 neue Punkte zu erhalten, öffne man den Zirkel etwas weiter, von B nach 2, beschreibe mit dieser Oeffnung aus f und f' die Kreisbögen 2,2 (in der Figur ist nur ein Kreisbogen 2,2 und zwar aus f beschrieben), nehme sofort die Linie $2A$ in den Zirkel und beschreibe damit aus f und f' zwei neue Kreisbögen, welche die so eben beschriebenen in den Punkten 2,2 etc. durchschneiden. So fahre man fort, bis man eine so grosse Anzahl von Punkten kennt, dass diese leicht aus freier Hand verbunden werden können. Noch muss bemerkt werden, dass jede erste Oeffnung des Zirkels um 4 neue Punkte zu erhalten, nie grösser sein darf als die halbe grosse Axe MA oder MB .

Aufgabe. Es ist eine Ellipse gegeben. Man soll eine gerade Linie konstruiren, welche diese in einem gegebenen Punkte t berührt.

Auflösung. Man verbinde t mit den Brennpunkten f und f' , verlängere die eine der beiden Verbindungslinien z. B. ft von t nach r , beschreibe mit tf' den Bogen $f'r$ und halbire denselben durch die Linie tP ; diese wird die Ellipse in dem gegebenen Punkte A berühren.

Aufgabe. Es ist eine Ellipse gegeben, und ausserhalb derselben ein Punkt P . Man soll durch diesen zwei gerade Linien ziehen, welche die gegebene Ellipse berühren.

Auflösung. Man beschreibe mit der Entfernung Pf' des gegebenen Punktes von dem zunächstliegenden Brennpunkte f' einen Kreisbogen $r'f'r$, nehme sodann die grosse Axe AB der Ellipse in den Zirkel, beschreibe mit dieser aus f einen zweiten Kreisbogen rr' , welcher den ersteren in den Punkten r und r' durchschneidet, ziehe die Hilfslinien fr und fr' und verbinde endlich den Punkt M mit den Durchschnittspunkten t und t' , durch die Linien Mt und Mt' ; diese Linien sind die verlangten Tangenten und t und t' ihre Berührungspunkte.

ZWEITER ABSCHNITT.

GEOMETRISCHE UND ISOMETRISCHE PROJEKTIONS- LEHRE.

ERSTES KAPITEL.

HAUPTSÄTZE DER PROJEKTIONSLEHRE.

(Taf. 4 und Taf. 5, Fig. 45 a — Fig. 56 b.)

Gegenstand der Projektionslehre.

Die Projektionslehre ist derjenige Theil der angewandten Geometrie, welche die räumlichen Grössen (Linien, Flächen und Körper), so wie irgend eine Verbindung von mehreren räumlichen Grössen, in einer Ebene so darzustellen lehrt, dass aus dieser Darstellung die wahre Gestalt und Grösse, so wie die gegenseitige Lage der dargestellten Grössen im Raume, genau bestimmt werden können.

Da der vorzüglichste Nutzen solcher Darstellungen, welche man mit dem Namen *Projektionen* bezeichnet hat, darin besteht, dass der *dargestellte Gegenstand durch seine Darstellung ersetzt und entbehrlich gemacht wird*, so ist klar, dass diese Darstellung selbst, wohl dann am zweckmässigsten sein wird, wenn sich die Form des Gegenstandes schon aus der blossen Ansicht der Darstellung

ergibt, die wahre Gestalt desselben und die Lage seiner einzelnen Theile aber, auf einem möglichst einfachen, sicheren und kurzen Wege bestimmt werden können.

Diese Aufgabe auf wissenschaftlichem Wege und für alle vorkommenden Fälle zu lösen, ist Zweck und Gegenstand der *geometrischen* und der *isometrischen Projektionslehre*.

Von den Eigenschaften der Projektionen eines Punktes.

(Taf. 4, Fig. 45 a — Fig. 45 b.)

Da alle Körper von Flächen, alle Flächen von Linien und alle Linien von Punkten entweder begränzt sind, oder doch durch diese begränzt werden können, und wie wir später sehen werden, jede Linie durch die Bewegung eines Punktes und jede Fläche durch die Bewegung einer Linie erzeugt werden kann, so muss man vor Allem wissen, wie ein Punkt im Raume, auf einer Ebene so dargestellt (projizirt) werden kann, dass aus dieser Darstellung die Bestimmung der Lage des Punktes selbst wieder möglich wird.

Zu diesem Zwecke denke man sich (Fig. 45 b) zwei Ebenen von beliebiger Grösse, welche senkrecht auf einander stehen, und fälle auf jede derselben von dem im Raume befindlichen Punkte P eine Senkrechte; eine einzige von diesen Senkrechten und eine von beiden Ebenen würde nun wohl die Lage des Punktes P im Raume schon für sich bestimmen; allein keine der Senkrechten befindet sich in einer der beiden gegebenen Ebenen, sondern beide liegen selbst wieder im Raume. Zieht man daher sofort von den Fusspunkten p und p' dieser Senkrechten auf die Linie Sa , in welcher sich die beiden Ebenen durch-

schneiden, zwei neue Senkrechten pa und $p'a$, so wird die Linie $pa = Pp'$ und die Linie $p'a =$ der Senkrechten Pp sein, und es können daher die Senkrechten Pp und Pp' durch die Linien $p'a$ und pa ersetzt werden. Die Linie ap bestimmt alsdann die Entfernung des Punktes p von der Linie aS , und die Linie ap' die Höhe der in p errichteten Senkrechten pP , und somit auch die Lage des Punktes P im Raume.

Obwohl nun auch diese Linien nicht in derselben Ebene liegen, so kann man doch die eine der beiden Ebenen so lange um ihre Durchschnittslinie Sa drehen, bis sie mit der anderen Ebene zusammenfällt (Fig. 45 a); da nun während dieser Drehung eine jede der Senkrechten pa und $p'a$ ihre Lage zur Linie Sa nicht verändern kann, so muss die Linie pa (Fig. 45 a), so wie früher die Entfernung des Punktes p von der Linie Sa und die Senkrechte $p'a$, die Höhe der in p errichteten Senkrechten pP (Fig. 45 b), und somit auch die Lage des Punktes P im Raume bestimmen.

Gewöhnlich denkt man sich die Lagen der beiden senkrechten Ebenen so, dass die eine derselben *horizontal*, und die andere *vertikal* ist; die horizontale Ebene nennt man die *horizontale Projektionsebene*, und die vertikale Ebene die *vertikale Projektionsebene*; den Punkt p nennt man die *horizontale Projektion* und p' die *vertikale Projektion* (Darstellung) des Punktes P ; die Linie Sr , in welcher sich die beiden Projektionsebenen durchschneiden, nennt man die *Grundlinie der Projektionsebenen*, oder die *Grundlinie* schlechweg.

Beide Projektionsebenen kann man sich ebensowohl begrenzt als unbegrenzt denken; im ersten Falle gibt man ihnen, wie Figur 45 a zeigt, eine rechtwinkliche Begrenzung.

Führen wir diese Benennungen in das oben erhaltene Resultat ein, so ergibt sich folgender:

ERSTER HAUPTSATZ.

Die beiden Projektionen (p und p') eines Punktes P im Raume befinden sich auf einer geraden Linie (pp'), welche auf der Grundlinie (sa) der beiden Projektionsebenen senkrecht steht; der untere Theil (ap) dieser Senkrechten bestimmt den Abstand des Punktes P von der vertikalen Projektionsebene, und der obere Theil (ap') dieser Senkrechten, den Abstand des Punktes von der horizontalen Projektionsebene *).

Unterfall. Wenn sich der Punkt, dessen beide Projektionen bestimmt werden sollen, in der horizontalen oder in der vertikalen Projektionsebene befindet, wie z. B. die Punkte Q und R (Fig. 45 a und Fig. 45 b), so liegt im ersteren Falle die vertikale Projektion (q') desselben, und im zweiten Falle seine horizontale Projektion (r) in der Grundlinie der beiden Projektionsebenen.

Projektionen der Linien.

ZWEITER HAUPTSATZ.

(Taf. 4, Fig. 46 a und Fig. 46 b.)

Wenn eine gerade Linie im Raume z. B. QVX , oder VR oder (Fig. 46 b) mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist, ohne zugleich auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht zu stehen, so ist ihre horizontale Projektion qv_x eine gerade Linie, welche ihr gleich ist und durch den Winkel, welchen sie mit der Grundlinie bildet, ihre Richtung gegen die vertikale Projektionsebene be-

*) Die strengen Beweise dieses und aller folgenden Hauptsätze finden sich in jedem Lehrbuche der darstellenden Geometrie.

stimmt; ihre vertikale Projektion $q'X$ aber ist parallel mit der Grundlinie.

Erster Unterfall. Ist die gerade Linie im Raume mit den beiden Projektionsebenen zugleich parallel, wie z. B. die Linie VS , so sind ihre beiden Projektionen vs und $p's'$ mit der Grundlinie parallel.

Zweiter Unterfall. Steht die Linie im Raume, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist, zugleich auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht, wie z. B. PV , so ist ihre vertikale Projektion (p') ein Punkt und ihre horizontale Projektion ($p v$) eine Linie, welche auf der Grundlinie senkrecht steht.

Zusatz. Die Figuren (Fig. 46 a und Fig. 46 b) zeigen, dass die vertikale Projektion einer mit der horizontalen Projektionsebene parallelen Linie um so kleiner wird, je grösser der Winkel ist, den diese Linie mit der vertikalen Projektionsebene bildet, und dass, wenn dieser Winkel ein rechter ist, die vertikale Projektion unendlich klein oder ein Punkt wird.

DRITTER HAUPTSATZ.

(Taf. 4, Fig. 47 a und Fig. 47 b)

Wenn eine gerade Linie im Raume z. B. QVX mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist, ohne zugleich auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht zu stehen, so ist ihre vertikale Projektion ($q'v'x'$) eine gerade Linie, welche ihr gleich ist und durch den Winkel, den sie mit der Grundlinie bildet, ihre Richtung gegen die horizontale Projektionsebene bestimmt; ihre horizontale Projektion Xs aber ist parallel mit der Grundlinie.

Erster Unterfall. (Es ist derselbe, wie der erste Unterfall der vorhergehenden Hauptsatzes.)

Zweiter Unterfall. Ist die Linie im Raume, welche mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist, zugleich auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht, wie z. B. die Linie PV , so ist ihre horizontale Projektion (p) ein Punkt, und ihre vertikale Projektion $p'v'$ eine Linie, welche auf der Grundlinie senkrecht steht.

Zusatz. Die Figuren 47 a und 47 b zeigen, dass die horizontale Projektion einer mit der vertikalen Projektionsebene parallelen Linie um so kleiner wird, je grösser der Winkel ist, den die Linie im Raume mit der horizontalen Projektionsebene bildet, und dass wenn dieser Winkel ein rechter ist, die horizontale Projektion unendlich klein, oder zu einem Punkte wird.

Darstellung verschiedener Lagen einer geraden Linie zwischen den beiden Projektionsebenen.

(Fig. 48 a — Fig. 50 b.)

Fig. 48 a und 48 b. Eine gerade Linie durchschneidet die beiden Projektionsebenen so, dass beide Durchschnittpunkte (A und B) sichtbar sind.

Fig. 49 a und 49 b. Eine gerade Linie (A B, Fig. 49 b) durchschneidet den hinteren Theil der horizontalen Projektionsebene in C, so dass der Durchschnittpunkt nach Umdrehung der horizontalen Projektionsebene um die Grundlinie (Fig. 49 a) mit der vertikalen Projektionsebene zusammenfällt, und weil er von dieser verdeckt wird, unsichtbar ist.

Fig. 50 a und 50 b. Eine gerade Linie (A B, Fig. 50 b) durchschneidet den unteren Theil der vertikalen Projek-

tionsebene in C , so dass dieser Durchschnittspunkt nach Umdrehung der horizontalen Projektionsebene um die Grundlinie (Fig. 50 a) von dieser bedeckt und daher unsichtbar wird.

Zusatz. In allen diesen Fällen wird der vertikale Durchschnittspunkt immer dadurch bestimmt, dass man die *horizontale Projektion* ($a B$, Fig. 50 a) der Linie bis zur *Grundlinie* verlängert und in dem Berührungspunkte c' eine Senkrechte $c'C$ errichtet, welche die vertikale Projektion der Linie durchschneidet. Dieser Durchschnittspunkt (c) ist zugleich der vertikale Durchschnittspunkt der Linie. Umgekehrt wird der horizontale Durchschnittspunkt C (Fig. 49 a) dadurch bestimmt, dass man die vertikale Projektion ($a'B$) der Linie bis zur Grundlinie verlängert und im Durchschnittspunkte c' eine Senkrechte errichtet, welche die horizontale Projektion ($a b C$) der Linie durchschneidet; der erhaltene Durchschnittspunkt (C) ist alsdann zugleich der horizontale Durchschnittspunkt der Linie.

VIERTER HAUPTSATZ.

(Fig. 51 a und Fig. 51 b.)

Wenn zwei oder mehrere gerade Linien im Raume z. B. AB , CD , EF mit einander parallel sind, so sind auch ihre horizontalen und ihre vertikalen Projektionen mit einander parallel, und die Längen derselben verhalten sich gerade so zu einander, wie die Linien im Raume selbst. Würden sich daher z. B. die Linien AB , CD und EF wie die Zahlen 5, 4 und 3 verhalten, so müssten auch sowohl ihre horizontalen als ihre vertikalen Projektionen in dem Verhältnisse der Zahlen 5, 4 u. 3 stehen *).

*) Es wird nicht unzweckmässig sein, wenn wir für den Anfänger die Bemerkung beifügen, dass dieser Satz im ganzen

FÜNFTER HAUPTSATZ.

(Fig. 52 a und Fig. 52 b.)

Wenn sich zwei Linien im Raume durchschneiden, so müssen sich auch ihre Projektionen durchschneiden, und die Durchschnittspunkte (m und m') dieser Projektionen auf einer Linie liegen, welche auf der Grundlinie senkrecht steht.

SECHSTER HAUPTSATZ.

(Fig. 53 a und Fig. 53 b.)

Wenn sich zwei gerade Linien im Raume (A P und B M) nicht durchschneiden, so können sich die Projektionen derselben wohl immer noch durchschneiden, aber ihre Durchschnittspunkte m und o' (Fig. 53 a) liegen alsdann auf einer Linie, welche auf der Grundlinie nicht senkrecht steht. (Diese Linie ist in (Fig. 53 a) $o'm$ und muss, da sie nicht gezogen ist, gedacht werden.)

Projektionen der Ebenen.

Entstehung einer Ebene. (Fig. 56 b.) Eine Ebene C A B entsteht dadurch, dass eine gerade Linie B C auf zwei anderen Linien C A und B A, welche sich in einem Punkte A durchschneiden, hingleitet.

Bestimmung der Lage einer Ebene mit Hilfe der beiden Projektionsebenen. Da eine Ebene unendlich viele Punkte enthält, so ist klar, dass dieselbe nicht dadurch bestimmt werden kann, dass man die Projektionen ihrer Punkte konstruiert; denn man müsste unendlich viele Punkte projizieren. Man benützt daher zur Darstellung einer Ebene den

Gebiete der geometrischen und isometrischen Projektionslehre einer der folgereichsten ist.

Umstand, dass die Lage derselben durch 2 Linien bestimmt ist welche man in den beiden Projektionsebenen anzeigt und *Leitlinien* benennt, indem sie die Bewegung einer dritten Linie, welche die Ebene erzeugt, in der That leiten. Auf diese Weise wird z. B. die Lage der Ebene $A B C$ (Fig. 56 b) durch die Linien $C A$ und $B A$ bestimmt.

Die in der horizontalen Projektionsebene befindliche Leitlinie einer Ebene wird die *horizontale Leitlinie*, die in der vertikalen Projektionsebene befindliche Leitlinie die *vertikale Leitlinie* genannt.

SIEBENTER HAUPTSATZ.

(Fig. 54 a u. Fig. 54 b.)

Wenn eine Ebene $A B C D$ (Figur 54 b) auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht, so ist die vertikale Projektion der Ebene eine Linie, welche mit ihrer vertikalen Leitlinie ($a'd'$ Fig. 54 a) zusammenfällt; auch bildet diese Linie mit der Grundlinie denselben Winkel, welchen die Ebene mit der horizontalen Projektionsebene bildet. Die horizontale Projektion ($a D C b$) der Ebene zeigt hingegen die Gestalt der Ebene verkürzt, und die horizontale Leitlinie $D C$ steht auf der Grundlinie senkrecht.

ACHTER HAUPTSATZ.

(Fig. 54 a und Fig. 54 b.)

Steht hingegen die Ebene auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht, so ist ihre *horizontale Projektion* eine Linie, welche mit der horizontalen Leitlinie ($a b$ Fig. 54 a) zusammenfällt und mit der Grundlinie denselben Winkel bildet, unter welchem die Ebene die vertikale Projektionsebene durchschneidet. Die vertikale Projektion $B C d' a'$ zeigt hingegen die Gestalt der Ebene verkürzt und die vertikale Leitlinie $B C$ steht auf der Grundlinie senkrecht.

NEUNTER HAUPTSATZ.

(Fig. 54 a und Fig. 54 b.)

Wenn eine Ebene auf beiden Projektionsebenen zugleich senkrecht steht, so ist sowohl ihre vertikale als ihre horizontale Projektion eine gerade Linie, und beide Projektionen fallen daher mit den Leitlinien $a b$ und $a' d'$ der Ebene zusammen; auch stehen die Leitlinien auf der Grundlinie in demselben Punkte senkrecht und liegen daher in derselben geraden Linie.

ZEHNTER HAUPTSATZ.

(Fig. 55 a und Fig. 55 b.)

Wenn eine beliebig begränzte Ebene $A B C$ mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist, so ist die vertikale Projektion $c' b'$ dieser Ebene eine Linie, welche mit der Grundlinie parallel ist; die horizontale Projektion $a b c$ dagegen zeigt die wahre Gestalt der Ebene.

EILFTER HAUPTSATZ.

(Fig. 55 a und Fig. 55 b.)

Wenn eine beliebig begränzte Ebene (I, II, III, IV, V) mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist, so zeigt die vertikale Projektion ($1', 2', 3', 4', 5'$) die wahre Gestalt der Ebene, während die horizontale Projektion derselben eine gerade Linie ($1, 2, 5, 3, 4$) ist, welche mit der Grundlinie parallel ist.

ZWÖLFTER HAUPTSATZ.

(Fig. 55 a u. Fig. 55 b.)

Wenn eine oder zwei Ebenen $A B C D$ und $E F G H$ eine solche Lage haben, dass sie mit der Grundlinie der

Projektionsebenen parallel sind, so sind auch die Leitlinien (A B und C D, so wie E F und G H) dieser Ebenen mit der Grundlinie parallel; ferner durchschneiden sich die Ebenen in einer Linie M N, welche nebst ihren Projektionen $m n$ und $m' n'$ ebenfalls zur Grundlinie parallel ist.

Zusatz. Um die Projektionen $m n$ und $m' n'$ der Durchschnittslinie M N und zugleich die gegenseitige Lage der Ebenen besser zu bestimmen, als dieses mit Hilfe der beiden Projektionsebenen geschieht, denkt man sich eine dritte, die sogenannte Profilebene H B (Fig. 55 b), welche auf der horizontalen und vertikalen Projektionsebene, und folglich auch auf den Ebenen im Raume zugleich senkrecht steht. Auf diese Ebene denkt man sich nun die sich durchschneidenden Ebenen A B C D, E F G H von Neuem projiziert, und hierauf die Profilebene so lange um die Linie B F gedreht, bis sie mit der vertikalen Projektionsebene zusammenfällt. Diese Drehung ist angezeigt in Fig. 55 a, woraus man erkennt, dass die Profilprojektion der Ebene E F H G (Fig. 55 b) nach $h' F$, und diejenige der Ebene A B C D nach $d B$ fällt; diese Projektionen geben nun die Winkel an, unter welchem die Ebenen im Raume, sowohl die beiden Projektionsebenen als sich selbst durchschneiden. Da die Profilprojektionen beider Ebenen als gerade Linien erscheinen, weil sie auf der *Profilebene* senkrecht stehen, so muss sich die Projektion ihrer Durchschnittslinie als ein Punkt m darstellen, und die horizontale Projektion $m n$ der Durchschnittslinie dadurch erhalten werden, dass man von m auf die Grundlinie die Senkrechte $m a$ fällt, mit $b a$ den Bogen $a n$ beschreibt und durch n mit der Grundlinie die Parallele $n m$ zieht.

DREIZEHENTER HAUPTSATZ.

(Fig. 56 a und Fig. 56 b.)

Wenn eine im Raume befindliche Ebene BAC zwischen den beiden Projektionsebenen eine beliebige Lage hat, und man denkt sich in dieser eine Linie PQ gezogen, welche mit der horizontalen Leitlinie BA parallel ist, so ist die horizontale Projektion dieser Linie mit der horizontalen Leitlinie, ihre vertikale Projektion ($p'Q$) aber mit der Grundlinie parallel.

VIERZEHENTER HAUPTSATZ.

(Fig. 56 a — Fig. 56 b.)

Wenn eine im Raume befindliche Ebene EDF zwischen den beiden Projektionsebenen eine beliebige Lage hat, und man denkt sich in dieser eine Linie MN gezogen, welche mit der vertikalen Leitlinie DF der Ebene parallel ist, so ist die vertikale Projektion ($m'n'$) dieser Linie mit der vertikalen Leitlinie, ihre horizontale Projektion (mN) aber, mit der Grundlinie parallel.

Mit Hilfe dieser beiden Sätze ist die Lösung folgender Aufgaben möglich:

Aufgabe. Man kennt die horizontale Projektion p eines in einer Ebene $BA D$ befindlichen Punktes P (Fig. 56 b). Es soll die vertikale Projektion dieses Punktes und seine Höhe bestimmt werden.

Auflösung. (Fig. 56a.) Man ziehe durch p mit der Leitlinie BA eine Parallele pq , errichte in q auf der Grundlinie die Senkrechte qQ , ziehe durch Q parallel mit der Grundlinie die Gerade Qp' und fälle endlich auf die Grundlinie von p eine Senkrechte pp' ; p' ist alsdann die vertikale Projektion des Punktes P und die Länge des über

der Grundlinie befindlichen Theiles der Senkrechten, seine Höhe.

Aufgabe. Man kennt die vertikale Projektion m' eines in einer Ebene EDF liegenden Punktes M; es soll die horizontale Projektion desselben bestimmt werden.

Auflösung. (Fig. 56a.) Man ziehe durch m' parallel mit FD die Linie $m'n'$, errichte in n' auf der Grundlinie die Senkrechte $n'N$, ziehe durch N parallel mit der Grundlinie die Linie Nm, und fälle endlich von m' senkrecht auf die Grundlinie die Linie $m'm$; m ist alsdann die horizontale Projektion des Punktes M und der unterhalb der Grundlinie befindliche Theil der Senkrechten sein Abstand von der vertikalen Projektionsebene.

FÜNFZEHNTER HAUPTSATZ.

(Fig. 56 a und Fig. 56 b.)

Wenn zwei Ebenen im Raume (BAC und EDF) mit einander parallel sind, so sind auch ihre *horizontalen* und *vertikalen Leitlinien* mit einander parallel, also AB parallel mit DE und AC parallel mit DF.

ZWEITES KAPITEL.

**ZUSAMMENSTELLUNG DER WICHTIGSTEN FLÄCHEN UND
KÖRPER. IHRE ERZEUGUNG. IHRE EIGENSCHAFTEN.**

Pyramiden.

(Taf. 6, Fig. 1, Fig. 2, Fig. 8 und Fig. 9.)

Entstehung der Pyramiden. Wenn eine gerade Linie an dem Umfange irgend eines regelmässigen oder unregelmässigen Vieleckes $abcdef$ (Fig. 2) hingeleitet, und während dieser Bewegung durch einen unveränderlichen Punkt (s, s') geht, so beschreibt sie eine *Pyramidal-Fläche*, und der Raum, den diese Fläche einschliesst, wird *Pyramide* genannt.

Zusatz. Wenn das Vieleck, an dessen Umfange die die gerade Linie hingeleitet, ein regelmässiges ist, und die horizontale Projektion (s) des festen Punktes in der Mitte dieses Vieleckes liegt, so entsteht eine regelmässige und senkrechte Pyramide (Fig. 1 und 2); befindet sich aber die horizontale Projektion des festen Punktes nicht in der Mitte des Vieleckes, so entsteht eine unregelmässige und schiefe Pyramide (Fig. 8 und 9).

Erklärung der Fig. 1 und 2. $abcdef$ ist das in der horizontalen Projektionsebene befindliche Vieleck, an dessen Umfang eine gerade Linie $(as, a's'a'')$ hingeleiten musste, um die Pyramide zu erzeugen; da alle Punkte dieses Vieleckes in der horizontalen Projektionsebene liegen, so müssen ihre vertikalen Projektionen $a'b'c'd'$ etc. ohne

Ausnahme in die Grundlinie fallen; s und s' sind die beiden Projektionen des unveränderlichen Punktes s , den die gerade Linie während ihrer Bewegung nicht verlassen darf; die Linien (sa und $s'a'$, sb und $s'b'$, sc und $s'c'$, sd und $s'd'$, se und $s'e'$, sf und $s'f'$) sind die horizontalen und vertikalen Projektionen der *Pyramidenkanten*; die Bedeutung der übrigen Linien wird aus dem Folgenden klar werden.

Eigenschaft der Pyramiden. Wenn man eine Pyramide (Fig. 1 und 2), deren Grundfläche $abcdef$ in der horizontalen Projektionsebene liegt, mittelst einer Ebene $1'4'$ (Fig. 1), welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist, durchschneidet, so bildet der Durchschnitt ein Vieleck (1, 2, 3 etc., Fig. 2), welches der Grundfläche der Pyramide ähnlich ist; ferner zeigt (nach einem vorhergehenden Satze) die horizontale Projektion des Durchschnittes die wahre Gestalt desselben, während die vertikale Projektion $1'4'$ mit der Grundlinie parallel ist. Hierauf gründet sich die Lösung folgender:

Aufgabe. Es ist die vertikale Projektion m' eines auf der Pyramide befindlichen Punktes gegeben. Man soll die horizontale Projektion m desselben Punktes bestimmen.

Erste Auflösung. Man ziehe durch m' parallel mit der Grundlinie eine Linie $1'm'4'$, betrachte diese als die vertikale Projektion einer Durchschnittsebene, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist und bestimme nun die horizontale Projektion des Durchschnittes selbst. Dies geschieht am zweckmässigsten dadurch, dass man von $4'$ eine Senkrechte $4'4$ auf die Grundlinie $a'd'$ zieht, dieselbe bis zur Linie sd verlängert, und durch den Punkt 4 parallel mit de die Linie 4 5, durch 5 parallel mit ef die Linie 5,6, durch 6 parallel mit fa die Linie 6,1, durch 1 parallel mit ab die Linie 1,2, durch

2 parallel mit bc die Linien 2,3, und endlich die Linie 3,4 zieht. Das Vieleck 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4 ist alsdann die horizontale Projektion des Durchschnittes $1'4'$ (Fig. 1), und es ergibt sich sofort die horizontale Projektion zu m' dadurch, dass man von m' auf die Grundlinie $a'd'$ eine Senkrechte $m'm$ zieht, und diese so weit verlängert, bis sie die horizontale Projektion des Durchschnittes verschneidet. Da man, wie sich aus der Figur ergibt, 2 Durchschnittspunkte m, m erhält, so ist hieraus der Schluss zu ziehen, dass jeder vertikalen Projektion m' eines Punktes zwei horizontale Projektionen entsprechen, von welchen die erste auf der vorderen und die zweite auf der hinteren Hälfte der Pyramide liegt, und dass demnach ein jeder Punkt m' auf der vertikalen Projektion $a'd's'$ einer Pyramide zweien Punkten der Pyramide zugleich entspreche.

Zweite Auflösung. Förderlicher, aber in den meisten Fällen ungenauer, ist folgende Methode: Man ziehe von s' (Fig. 1) durch m' die Linie $s'n'$, errichte in n' auf der Grundlinie $a'd'$ die Senkrechte $n'pn$, ziehe die Linien sp und sn , und fälle zuletzt von m' , senkrecht auf die Grundlinie die Gerade $m'm$, welche die Linien sp und sn durchschneidet. Die Durchschnittspunkte m und m' sind alsdann die beiden horizontalen Projektionen, welche der vertikalen Projektion m' entsprechen.

Erklärung dieser Konstruktion. Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich aus folgender Betrachtung. Der Punkt m' liegt auf der Linie $s'm'n'$; will man daher die horizontale Projektion zu m' bestimmen, so muss zuvor die horizontale Projektion der Linie $s'n'$ und folglich die des Punktes s' und des Punktes n' konstruirt werden; die horizontale Projektion von s' ist aber s , während diejenige des Punktes n' , welcher sich auf der vertikalen Projektion $a'b'c'd'$ der Grundfläche $abcdef$ befindet,

auf $abcdef$ und folglich da liegen muss, wo diese Grundfläche von der Senkrechten $n'p$ n durchschnitten wird, also entweder in n oder in p ; die horizontale Projektion der Linie $s'n'$ befindet sich daher entweder in sn oder in sp , folglich die horizontale Projektion zu m' entweder in m auf dem vorderen oder in m auf dem hinteren Theile der Pyramide.

Erster Zusatz. Dass die zweite Auflösungsmethode nur in wenigen Fällen genau sein wird, ergibt sich aus der blossen Betrachtung der Figur 2, welche anzeigt, dass die Durchschneidung der Linien sn und $m'm$ immer unbestimmter wird, je mehr sich der Punkt m' dem mittleren Theile der Pyramide nähert.

Zweiter Zusatz. Es ist ferner klar, dass man zur Bestimmung des Punktes m nach der ersten Methode nur die Linien 5,6 und 2,3, nicht aber das ganze Vieleck 4,5,6,1,2,3,4 zu konstruiren nöthig hat.

Dritter Zusatz. Sollten zu der vertikalen Projektion $3'$ die beiden horizontalen Projektionen 3 und 5 bestimmt werden, so hätte man von $3'$ auf die Grundlinie nur eine Senkrechte $3'5,3$ zu fällen, indem sich $3'$ auf der vertikalen Projektion $s'3'c'$ zweier Kanten befindet, deren horizontale Projektionen sc und se bereits konstruirt sind.

Vierter Zusatz. Wäre die horizontale Projektion m eines Punktes gegeben, und sollte zu dieser die vertikale Projektion m' konstruirt werden, so dürfte man nur die entgegengesetzte Ordnung der beiden obenbeschriebenen Verfahrensweisen befolgen.

Man zieht nämlich, in Folge der ersten Methode:

- 1) $m\ 3$ parallel mit $b\ c$;
- 2) $3,4$ parallel mit $c\ d$;
- 3) $4,4'$ senkrecht auf die Grundlinie ;
- 4) $4'1'$ parallel mit der Grundlinie ;
- 5) $m\ m'$ senkrecht auf die Grundlinie.

Aus der Durchschneidung der Linien $4'1'$ und $m\ m'$ ergibt sich der Punkt m' .

Wollte man hingegen nach der zweiten Methode verfahren, so müsste gezogen werden :

- 1) die Linie $s\ m\ n$;
- 2) die Linie $n\ n'$ senkrecht auf die Grundlinie ;
- 3) die Linie $s'n'$, und endlich
- 4) die Linie $m\ m'$ senkrecht auf die Grundlinie.

Aus der Durchschneidung der Linien $s'n'$ und $m\ m'$ ergibt sich der verlangte Punkt m' .

Wir rathen sowohl dem Anfänger als dem Lehrer diese Aufgabe nicht eher zu verlassen, als nachdem sie auf das Gründlichste verstanden und erklärt ist.

Prismen oder Säulen.

(Taf. 6, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 12 und Fig. 13.)

Entstehung der Prismen. Wenn eine gerade Linie an dem Umfange eines regelmässigen oder unregelmässigen Vieleckes hingleitet, und während ihrer Bewegung mit sich parallel bleibt, so entsteht ein *Prisma* oder eine *Säule*.

Erster Zusatz. Da eine solche Säule nur durch ihre Seitenflächen und das Vieleck ($a\ b\ c\ d\ e$, $a'b'c'$) begränzt ist, an dessen Umfang die gerade Linie, welche dieselbe erzeugte, hingleitete, so muss man, um die Figur von allen Seiten zu begränzen, noch eine zweite Ebene $a'b'c'$ (Fig. 3) durch dieselbe legen, welche mit der Ebene ($a\ b\ c\ d$, $a'b'c'$)

entweder parallel oder nicht parallel sein kann; die Ebenen $a'b'c'$, $a'b'c'$ werden die *Grundflächen* der Säule genannt.

Zweiter Zusatz. Wenn das Vieleck, an dessen Umfang die erzeugende Linie aa' hingeleitet, in der horizontalen Projektionsebene liegt, und die Linie während ihrer Bewegung auf dieser senkrecht bleibt, so dass sie also die aufeinanderfolgenden Lagen $(a, a'a')$, $(b, b'b')$, $(c, c'c')$ etc. (Fig. 3 und 4) erhält, so entsteht eine *senkrechte Säule*, und wenn das Vieleck $abcd$ ein regelmässiges ist, eine *regelmässige Säule*.

Steht jedoch die erzeugende Linie $a, a'a'$ wie in Figur 12 und 13 nicht auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht, so entsteht eine *schiefe Säule*.

Erklärung der Figuren 3 und 4. $abcde$ ist die horizontale Projektion der beiden Grundflächen, deren vertikale Projektionen in $a'b'c'$, $a'b'c$ liegen. a, b, c, d, e sind die horizontalen Projektionen der Säulenkanten, deren vertikale Projektionen in $a'a'$, $b'b'$, $c'c'$ liegen und auf der Grundlinie senkrecht stehen; dies ist die Folge der Voraussetzung, dass die Linie $a'a'$ während ihrer Bewegung zu der horizontalen Projektionsebene eine senkrechte Richtung beibehielt.

Die Linien bc , cd , de , ea und ab müssen aus demselben Grunde die horizontalen Projektionen der Seitenflächen der fünfseitigen Säule sein. (Siehe Hauptsatz 8.) Da endlich die vertikalen Projektionen der Kanten b und e , so wie der Kanten c und d zusammenfallen, so müssen auch die vertikalen Projektionen der Flächen ab und ae , so wie der Flächen bc und de zusammenfallen, und weil die Seitenfläche cd eine Ebene ist, welche auf den beiden Projektionsebenen zugleich senkrecht steht, so

müssen sich auch ihre beiden Projektionen cd und $c'c'$ als Linien zeigen, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen.

Eigenschaft der Prismen oder Säulen. (Fig. 12 und 13.) Wenn man durch irgend einen Punkt a' eines Prisma's eine Ebene legt, welche mit der Grundfläche $abcdef$ dieses Prisma's parallel ist, so entsteht ein Durchschnitt, welcher der Grundfläche vollkommen gleich ist. Befindet sich daher die Grundfläche in der horizontalen Projektionsebene, so ist die vertikale Projektion des Durchschnittes eine Linie, welche mit der Grundlinie parallel ist, während ihre horizontale Projektion ein Vieleck ist, welches die wahre Gestalt des Durchschnittes bestimmt.

Kegelflächen.

(Taf. 6, Fig. 5, 6, 10 und 11.)

Entstehung der Kegelflächen. Wenn eine gerade Linie an dem Umfange irgend einer krummen Linie, z. B. eines Kreises $anbo$ (Fig. 6), hingleitet und während dieser Bewegung durch einen unveränderlichen Punkt (s, s') geht, so beschreibt sie eine *Kegelfläche*, und der Raum, den diese Fläche einschliesst, wird ein *Kegel* genannt. Ist die erzeugende Linie $a's'$ (Fig. 5) nicht durch den Punkt s' begränzt, sondern setzt sie sich noch nach a'' fort, so entsteht durch ihre Bewegung ein Doppelkegel, wie ihn Figur 5 zeigt, von welchem jedoch der eine Theil immer weggedacht wird.

Erster Zusatz. Nicht immer ist die krumme Linie, an deren Umfang die gerade Linie hingleitet, ein Kreis; man sollte daher die auf obige Weise erzeugte Kegelfläche immer speziell als eine *Kreis-kegelfläche* bezeichnen.

Zweiter Zusatz Wenn der Punkt s' auf einer Linie $s's$ liegt, welche durch den Mittelpunkt der von der krummen Linie eingeschlossenen Fläche geht, und zugleich auf dieser Fläche senkrecht steht, so wird durch die Bewegung der geraden Linie ($as, a's'$) ein *senkrechter Kegel* (Fig. 5 und 6) erzeugt; geht jedoch die von s' auf die Grundfläche des Kegels senkrecht gefällte Linie nicht durch den Mittelpunkt der von der krummen Linie eingeschlossenen Fläche (Fig. 10 und 11), so entsteht durch die Bewegung der geraden Linie ein *schiefer Kegel*.

Eigenschaft der Kegelflächen. Wenn man eine *senkrechte* Kreiskegelfläche (Fig. 5 und 6), deren Grundfläche in der horizontalen Projektionsebene liegt, mittelst einer Ebene $m'd'$, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist, durchschneidet, so bildet der Durchschnitt einen Kreis, dessen horizontale Projektion ebenfalls ein dem Durchschnitte selbst vollkommen gleicher Kreis ist, dessen Mittelpunkt in dem Mittelpunkte s der Grundfläche liegt, während die vertikale Projektion eine gerade Linie ist, welche mit der Grundlinie parallel läuft. Hieraus ergibt sich die Auflösung folgender

Aufgabe. Es ist die vertikale Projektion m' eines auf der Kegelfläche befindlichen Punktes gegeben. Man soll die horizontale Projektion m desselben bestimmen.

Auflösung. Man ziehe durch m' parallel mit der Grundlinie $a'b'$ eine Gerade $m'd'$, fälle von d' eine Senkrechte $d'd$ auf die Grundlinie $a'b'$, verlängere dieselbe bis zur Linie sb , beschreibe aus s mit sd einen Kreis, und ziehe endlich, senkrecht auf die Grundlinie, die Gerade $m'm$; die beiden Punkte m , in welchen diese Senkrechte den gezogenen Kreis durchschneidet, sind alsdann die gewünschten horizontalen Projektionen des auf der Kegelfläche befindlichen Punktes.

Erklärung. Da die vertikale Projektion des Punktes b in b' liegt, so muss offenbar $s'b'$ die vertikale Projektion derjenigen Linie sein, deren horizontale Projektion sich in sb befindet, woraus von Neuem hervorgeht, dass der vertikalen Projektion $s'd'$ die horizontale Projektion sd entspricht. Der Punkt d' ist aber zugleich ein Punkt des Durchschnittes $m'd'$ und folglich der mit sd beschriebene Kreis die horizontale Projektion des Durchschnittes selbst; die der vertikalen Projektion m' entsprechenden Punkte m, m' müssen sich daher dort befinden, wo der mit sd beschriebene Kreis von der Senkrechten mm' durchschnitten wird.

Zylinderflächen.

(Taf. 6, Fig. 7, 8, 14 und 15.)

Wenn eine gerade Linie, z. B. $a, a'a'$ (Fig. 7 und 14), an dem Umfange irgend einer krummen Linie, z. B. eines Kreises, hingleitet, und während ihrer Bewegung mit sich parallel bleibt, so beschreibt sie eine Zylinderfläche.

Erster Zusatz. Ist die krumme Linie, an deren Umfang die erzeugende Linie hingleitet, ein Kreis, so nennt man die von ihr beschriebene Fläche eine Kreiszyylinderfläche.

Zweiter Zusatz. Um die Zylinderfläche, welche nur von der Seite und durch die Ebene begränzt ist, in welcher sich die krumme Linie befindet, von allen Seiten zu begränzen, durchschneidet man dieselbe in den meisten Fällen mittelst einer Ebene $a'b'$ (Fig. 7), welche mit der erstgenannten Ebene parallel ist. Beide Ebenen werden die *Grundflächen* des Zylinders genannt.

Dritter Zusatz. Wenn sich der Kreis, an dessen Umfang die erzeugende Linie hingleitet, in der horizontalen Projektionsebene befindet, und die

erzeugende Linie während ihrer Bewegung auf dieser senkrecht bleibt, wie in Fig. 7 und 8, so entsteht eine senkrechte Kreiszyylinderfläche. Hat jedoch die erzeugende Linie zur horizontalen Projektionsebene keine senkrechte Richtung, wie in Fig. 14 und 15, so entsteht eine schiefe Kreiszyylinderfläche.

Vierter Zusatz. Die Zylinderfläche nennt man auch den *Mantel* des Zylinders, so wie man die Kegelfläche den *Mantel* des Kegels nennt.

Eigenschaft der Zylinderflächen. Wenn man irgend eine Zylinderfläche (Fig. 14 und 15) mittelst einer Ebene $a'm'$, welche mit der in der horizontalen Projektionsebene befindlichen Grundfläche des Zylinders parallel ist, durchschneidet, so ist die horizontale Projektion dieses Durchschnit-tes der Grundfläche des Zylinders selbst vollkommen gleich.

Umwälzungsflächen.

(Taf. 6, Fig. 16, 17, 18 und 19.)

Entstehung derselben. Wenn sich irgend eine krumme Linie z. B. eine Kreislinie (Fig. 16) um eine unveränderliche gerade Linie wie um ihre Axe bewegt, so beschreibt sie durch diese Bewegung eine *Umwälzungsfläche*.

Erster Zusatz. Wenn die *Axe*, um welche sich eine Kreislinie bewegt, ein Durchmesser des Kreises ist, so wird die hiedurch entstehende Umwälzungsfläche eine *Kugelfläche* genannt (Fig. 16 und 17).

Zweiter Zusatz. Befindet sich hingegen die *Axe* $m, m'm'$, um welche sich eine Kreislinie bewegt, zwar in der Ebene der Kreislinie aber ausserhalb derselben, so entsteht eine sogenannte *ringförmige Fläche* oder ein *Wulst*.

Dritter Zusatz. Zur leichteren Ausführung der nöthigen Konstruktionen nimmt man in allen Fällen die Axe einer Umwälzungsfläche senkrecht auf der horizontalen Projektionsebene an. Hiedurch geschieht es, dass ein jeder Punkt der sich um die Axe bewegend krummen Linie, z. B. n, n' , Fig. 16 und 17, eine Kreislinie beschreibt, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist, so dass also die horizontale Projektion dieses Kreises die wahre Grösse des Kreises selbst bestimmt, während seine vertikale Projektion eine Linie ist, die mit der Grundlinie parallel läuft. Hierin ist daher auch die Erklärung der Haupteigenschaft der Umwälzungsflächen zu finden.

Eigenschaft der Umwälzungsflächen. Wenn man eine Umwälzungsfläche (Fig. 18 und 19) mittelst einer Ebene $f'g'$ (Fig. 18) durchschneidet, welche zur Grundfläche parallel ist, so ist der Durchschnitt in allen Fällen ein Kreis, dessen horizontale Projektion $fp g q$ die wahre Gestalt desselben bestimmt, während seine vertikale Projektion $f'g'$ eine mit der Grundlinie parallele Linie ist.

Besondere Eigenschaft der Kugelflächen. Wenn eine Kugelfläche von irgend einer Ebene durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt in allen Fällen ein Kreis. Besitzt daher die durchschneidende Ebene eine solche Lage, dass sie mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist, so muss die vertikale Projektion des Durchschnittes ein Kreis sein, der die wahre Gestalt des Durchschnittes bestimmt, während die horizontale Projektion des Durchschnittes eine zur Grundlinie parallele Linie ist. Die gerade Linie ab (Fig. 17) ist daher die *horizontale Projektion* eines durch den Mittelpunkt m gelegten Durchschnittes, während seine vertikale Projektion die Kreis-

linie $a'n'b'$ (Fig. 16) ist. Hieraus ergibt sich die Lösung folgender Aufgabe.

Aufgabe. Auf der vertikalen Projektion einer Kugel-
fläche (Fig. 16) ist ein Punkt m' gegeben. Man soll die
demselben entsprechende horizontalen Projektionen be-
stimmen.

Auflösung. Man ziehe durch m' parallel zur Grund-
linie die Linie $m'n'$, ziehe von n' senkrecht auf die Grund-
linie die Linie $n'n$ bis zur Durchschneidung mit ab ,
beschreibe mit Mn die Kreislinie nmm und ziehe end-
lich von m' senkrecht auf die Grundlinie die Gerade
 $m'm$; die beiden Punkte m und m , in welchen die mit
 Mn beschriebene Kreislinie von der Senkrechten $m'm$
durchschnitten wird, müssen alsdann die horizontalen
Projektionen derjenigen Punkte sein, welche ihre verti-
kale Projektion in m' haben.

Wenn umgekehrt zu einem in der horizontalen Pro-
jektion einer Kugel- fläche (Fig. 17) befindlichen Punkte
 m die entsprechende vertikale Projektion m' bestimmt
werden sollte, so hätte man der Reihe nach folgende
Operationen auszuführen:

1) Man beschreibe mit Mm den Kreisbogen mn bis
zur Linie ab .

2) Man ziehe aus n senkrecht auf die Grundlinie die
Gerade nn' .

3) Man ziehe parallel mit der Grundlinie die Linie
 $n'm'$.

4) Man ziehe aus m senkrecht auf die Grundlinie die
Linie mm' . Hieraus ergeben sich die beiden Punkte m' ,
welche die vertikalen Projektionen zweier auf der Kugel-
fläche befindlicher Punkte sind, deren horizontale Pro-
jektionen sich in m befinden.

Zusatz. Aus den vorhergehenden Auflösungen ergibt
sich, dass einem jeden in der vertikalen Projek-

tion einer Kugel­fläche befindlichen Punkte m' zwei horizontale Projektionen m, m' und ebenso einer jeden in der horizontalen Projektion einer Kugel­fläche befindlichen Punkte m zwei vertikale Projektionen m, m' entsprechen.

Aufgabe. In der vertikalen Projektion (Fig. 18) einer ringförmigen Umwälzungsfläche ist ein Punkt p' gegeben. Man soll die der vertikalen Projektion p' entsprechenden horizontalen Projektionen bestimmen.

Auflösung. Man ziehe durch p' parallel mit der Grundlinie eine Gerade $f'g'$, falle aus g senkrecht auf die Grundlinie die Linie $g'g$ bis zu ma (Fig. 19), beschreibe aus m mit mg einen Kreis und ziehe aus p' senkrecht auf die Grundlinie die Gerade $p'p$; die beiden Punkte p und q , in welchen diese den mit mg beschriebenen Kreis durchschneidet, sind die beiden horizontalen Projektionen derjenigen Punkte, deren vertikale Projektionen in den Punkt p' fallen.

Wäre die horizontale Projektion p eines auf der oberen Hälfte der ringförmigen Fläche befindlichen Punktes gegeben, und sollte hieraus die vertikale Projektion dieses Punktes bestimmt werden, so müssten der Reihe nach folgende Operationen ausgeführt werden:

- 1) Man ziehe mit mp den Kreisbogen pg .
- 2) Man falle aus g senkrecht auf die Grundlinie die Gerade gg' .
- 3) Man ziehe durch g parallel mit der Grundlinie die Linie $g'f'$.
- 4) Man ziehe aus p senkrecht auf die Grundlinie die Gerade pp' . Hieraus ergibt sich der Punkt p' .

Erklärung der übrigen in Fig. 18 und 19 vorkommenden Linien. Die gerade Linie $a'a'$ (Fig. 18) ist die vertikale Projektion einer durch den Mittelpunkt des erzeu-

genden Kreises $a'c'b'd'$ gelegten Ebene, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist; die horizontale Projektion dieser Ebene muss daher der durch die Punkte a, a gehende grosse Kreis (Fig. 19) sein.

Die Linie ba (Fig. 19) ist die vertikale Projektion einer Ebene, welche durch die Axe $m, m'm'$ geht und mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist; ihre vertikale Projektion $a'c'b'd'$ muss daher die wahre Gestalt des Durchschnittes dieser Ebene und der kreisförmigen Ringfläche besitzen, und demnach der erzeugende Kreis sein, von welchem jedoch nur die eine Hälfte, nämlich $c'a'd'$ sichtbar ist.

Die gerade Linie $c'c'$ endlich (F. 18) ist die vertikale Projektion der von dem höchsten Punkte c' des erzeugenden Kreises beschriebenen Kreislinie, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist; die horizontale Projektion dieser Kreislinie muss daher wieder eine solche und zwar diejenige sein, welche durch die Punkte c, c geht; dass sich der Punkt c in der Mitte der Linie ab befinden muss, ist wohl für sich klar.

Schraubenlinie, Schraubenflächen und Schraubenkörper.

(Taf. 6, Fig. 20 und 21.)

Entstehung einer Schraubenlinie. Wenn sich ein auf einer senkrechten Zylinderfläche befindlicher Punkt a (Fig. 21), in der Weise ansteigend, auf der Zylinderfläche fortbewegt, dass sich die horizontalen Projektionen der zurückgelegten Wege, wie die Höhen verhalten, in welchen sich der Punkt nach Zurücklegung dieser Wege befindet, so beschreibt derselbe eine Schraubenlinie $a'a'b'b'a'$. Wenn daher z. B. die horizontale Projektion des Weges, welchen der Punkt a zurückgelegt hat, in einem Falle ein Viertelskreis und in einem andern Falle ein

Halbkreis wäre, so müsste die Höhe des beweglichen Punktes im zweiten Falle zweimal so gross sein, als die Höhe desselben im ersten Falle.

Entstehung einer Schraubenfläche. Wenn sich eine gerade Linie ab (Fig. 21), in der Weise aufsteigend, fortbewegt, dass ein jeder der Punkte a und b während seiner Bewegung beständig auf einer senkrechten Zylinderfläche bleibt, und die horizontalen Projektionen der zurückgelegten Wege in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Höhen, in welchen sich beide Punkte nach Zurücklegung ihrer Wege befinden, so beschreibt die Linie ab eine Schraubenfläche.

Entstehung eines Schraubenkörpers. Wenn sich irgend eine gerad- oder krummlinicht begränzte Figur so bewegt, dass alle Punkte derselben *Schraubenlinien* beschreiben, so entsteht ein von *Schraubenflächen* begränzter Körper (Fig. 20).

Aufgaben zur Uebung.

(Taf. 6 bis.)

Diese Tafel enthält zur Uebung des Anfängers eine Reihe von Konstruktionen, worin die vorhergehenden Lehrsätze ihre Anwendung finden.

Wir rathen dem Lehrer, nicht eher zur folgenden Tafel überzugehen, als bis die Schüler eine hinreichende Fertigkeit besitzen, um sowohl aus jeder gegebenen horizontalen Projektion einer Linie, die entsprechende vertikale, als aus einer gegebenen vertikalen Projektion die entsprechende horizontale bestimmen zu können.

Es wird für den Unterricht *besonders* förderlich sein, wenn den Schülern die Hauptsätze 1, 10 und 11 häufig in Erinnerung gebracht werden, indem die bei weitem grösste Zahl der auszuführenden Konstruktionen einzig auf diesen Sätzen beruht.

(Taf. 6 bis, Fig. 1 und 2.)

Aufgabe. Es sind die beiden Projektionen einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide gegeben. Man soll aus der vertikalen Projektion $s'g'$ einer auf der Pyramide befindlichen Linie die horizontale Projektion (sG) dieser Linie bestimmen.

Auflösung. Da g' auf $a'b'$ liegt, so fälle man die Linie $g'G$ senkrecht auf die Grundlinie bis zu ab und ziehe die Linie sG .

Aufgabe. Man soll aus der vertikalen Projektion $1'2'3'$ einer auf der Oberfläche einer Pyramide befindlichen krummen Linie die horizontale Projektion derselben bestimmen.

Auflösung. Man bestimme die den vertikalen Projektionen $1'$, $2'$, $3'$ entsprechenden horizontalen Projektionen 1 , 2 , 3 auf die oben angegebene Weise (dieselbe erhellt auch aus der Figur) und ziehe die Verbindungslinien $1,2$ und $2,3$.

(Taf. 6 bis, Fig. 1, 2 und 3.)

Aufgabe. Man soll die Oberfläche einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide *entwickeln*, oder man soll alle Seitenflächen der Pyramide in derselben Ebene nebeneinander ausbreiten.

Auflösung. Man denkt sich zu diesem Zwecke die Oberfläche der Pyramide nach irgend einer ihrer sechs Kanten, z. B. nach sd (Fig. 1 und 2), aufgeschnitten und die Seitenflächen um ihre Kanten drehbar. Dieses festgehalten, besteht also die gegebene Aufgabe darin, eine Reihe von sechs Dreiecken zu konstruieren, von welchen je zwei aufeinanderfolgende Dreiecke eine gemeinschaftliche Kante besitzen.

Die einzige Frage ist demnach die, ob man die Seiten dieser Dreiecke kennt. Nun besitzen aber die Seiten ab , bc , cd etc., welche die Grundfläche der Pyramide bilden, ihre wahre Gestalt, während die wahre Grösse der sechs gleichen Seitenkanten durch die Linie $a's'$ oder $s'd'$ angegeben wird, indem die entsprechenden Kanten, wie sich aus den horizontalen Projektionen sa und ad ergibt, mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind. Die auszuführende Konstruktion ist demnach folgende:

Man beschreibe mit $s'd'$ als Radius einen unbestimmten Kreisbogen dd (Fig. 3), nehme die Linie ab oder bc etc. in den Zirkel, trage diese auf dem Kreisbogen sechsmal als Senne auf und ziehe endlich sowohl die Verbindungslinien dc , cb , ba , af , fe und ed , als die Verbindungslinien sd , sc , sb , sa , sf , se und sd .

Sollte auf dieser Entwicklung auch die Lage der Linie ($1'2'3'$, $1,2,3$) bestimmt werden, so hätte man zur Bestimmung des Punktes ($1,1'$) parallel mit der Grundlinie die Linie $1',h'$ bis zu $s'd'$ zu ziehen und die Entfernung des Durchschnittspunktes h' von dem Punkte s' auf die Linie sb (Fig. 3) von s nach 1 tragen. Zur Bestimmung des Punktes 2 hingegen wird (Fig. 2) die Hilfslinie $s2$ gezogen und diese durch einen Kreisbogen nach si getragen. Zu dieser *nun* mit der Grundlinie *parallelen* horizontalen Projektion bestimme man die vertikale $s'i''$ und ziehe durch $2'$, parallel mit der Grundlinie, die Gerade $2'2''$. Endlich trage man die Linie bm von b nach m (Fig. 3), ziehe die Linie sm und trage auf diese die Linie $s'2''$ von s nach 2 .

Die Erklärung des letzten Theiles der Auflösung ergibt sich aus dem Hauptsatze 3. Wenn daher die horizontale Projektion sm nach si getragen ist, so muss die entsprechende vertikale Projektion $s'i''$ die wahre Grösse

der Linie (s, i, s', i'') und folglich auch $s'2''$ die wahre Grösse der Linie $(s2, s'2')$ angeben.

(Taf. 6 bis, Fig. 4, 5 und 6.)

Aufgabe. Die beiden Projektionen einer regelmässigen fünfseitigen Säule sind gegeben. Man soll die Oberfläche dieser Säule entwickeln und die Gestalt der Entwicklung bestimmen, wenn der obere Theil der Fläche nach einer Linie abgeschnitten wäre, deren vertikale Projektion durch $1'2'3'4'5'$ dargestellt ist.

Auflösung. Bevor man mit der Entwicklung der Oberfläche des gegebenen Körpers beginnt, müssen die horizontalen Projektionen der Punkte $1'2'3'4'5'$ bestimmt werden. Dies geschieht dadurch, dass man aus jedem derselben eine Senkrechte auf die Grundlinie fällt und diese so weit verlängert, bis sie die horizontale Projektion derjenigen Ebene durchschneidet, in welcher der in der vertikalen Projektionsebene befindliche Punkt liegt. So z. B. muss die Senkrechte $2'2$ bis zu ab verlängert werden, weil sich der Punkt $(2'2')$ in der Ebene $(ab, a'a'b'b')$ befindet und die horizontale Projektion dieser Ebene die Linie ab ist. Die Figur zeigt jedoch, dass die vertikale Projektion $2'$ auch noch einem anderen Punkte entspreche, welcher sich in derjenigen Ebene befindet, deren horizontale Projektion die Linie ae ist, während ihre vertikale Projektion durch diejenige der angrenzenden Ebene verdeckt wird. Auf gleiche Weise entsprechen dem Punkte $4'$ die beiden horizontalen Projektionen 4 und 7 , dem Punkte $3'$ die horizontalen Projektionen b und e , so wie endlich dem Punkte $5'$ die horizontalen Projektionen c und d .

Da nun, wie sich aus Betrachtung der Figuren 4 und 5 ergibt, die Oberfläche einer regelmässigen fünfseitigen Säule aus 5 vollkommen gleichen Rechtecken besteht,

deren Grundlinien durch die Seiten ab , bc , cd , de , ea und deren Höhen durch die Linien $a'a'$, $b'b'$ etc. bestimmt sind, so muss sich die Entwicklung der Säule (Fig. 6) durch folgende Konstruktion ergeben:

Man ziehe (Fig. 6) eine unbestimmte Linie dd , trage auf dieser die Grundlinie einer der fünf rechtwinklichen Seitenflächen z. B. ab fünfmal auf, errichte in den Endpunkten senkrecht auf dd zwei gerade Linien, trage auf jede derselben die Höhe einer Seitenfläche z. B. $a'a'$ auf, und verbinde die Endpunkte dieser Senkrechten durch eine gerade Linie. Dadurch erhält man als die *Entwicklung einer regelmässigen fünfseitigen Säule ein Rechteck*, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich der Höhe der Säule ist.

Um endlich auf dieser Entwicklung die Lage der mehrfach gebrochenen Linie zu bestimmen, deren vertikale Projektion $1'2'3'4'5'$ gegeben ist, denke man sich eine jede der Senkrechten dd , dd als eine bestimmte Kante, z. B. als d (Fig. 5), nach welcher die Oberfläche der Säule behufs ihrer Entwicklung aufgeschnitten werden musste, und trage sofort die Linie $d7$ (Fig. 5) von d nach 7 (Fig. 6); $7e$ (Fig. 5) von 7 nach e (Fig. 6); $e9$ (Fig. 5) von e nach 9 (Fig. 6) etc.; alsdann errichte man in allen diesen Theilungspunkten senkrechte Linien und trage zuletzt auf diesen die entsprechenden Höhen aus Fig. 4 auf. Die Senkrechten $7,7$ und $4,4$ sind daher z. B. gleich der Höhe des Punktes $4'$ (Fig. 5). Was die Senkrechten $c5$, $d6$, $d6$ (Fig. 6) betrifft, so muss man sich erinnern, dass der Punkt $5'$ die vertikale Projektion zweier Punkte ist, von welchen sich der Punkt 5 auf der Kante c (Fig. 6), der Punkt 6 hingegen auf der Kante d befindet. Sind auf diese Weise alle Senkrechten (Fig. 6) bestimmt, so hat man nur noch je zwei aufeinanderfolgende Punkte durch gerade Linien zu verbinden.

(Taf. 6 bis, Fig. 7 und 8.)

Aufgabe. Die beiden Projektionen einer senkrechten Kreiskegelfläche sind gegeben. Man soll aus der vertikalen Projektion $s'b'$ einer Seitenlinie der Kegelfläche die horizontale Projektion sb dieser Linie bestimmen.

Auflösung. (Siehe Seite 54 ff.)

Aufgabe. Man soll aus der vertikalen Projektion p' eines auf der Oberfläche eines Kegels befindlichen Punktes, die horizontale Projektion P desselben bestimmen.

Auflösung. (Siehe Seite 54 ff.)

Aufgabe. Man soll aus der vertikalen Projektion irgend einer auf einer Kegelfläche befindlichen Linie die horizontale Projektion derselben bestimmen.

Auflösung. Man bezeichne auf der gegebenen vertikalen Projektion $p'1'2'3'4'5'6'r'$ eine beliebige Anzahl von Punkten, worunter sich besonders solche befinden müssen, wo die Linie beginnt und aufhört, oder eine Aenderung in ihrer Richtung stattfindet, wie z. B. die Punkte r' , $6'$, $3'$ und p' . Nun bestimme man zu den gewählten Punkten ihre entsprechenden horizontalen Projektionen $P, 1, 2, 3, 4, 5, 6, r$ und verbinde dieselben aus freier Hand.

Anmerkung. Wenn die vertikale Projektion einer Linie ihre Richtung nicht *allmählich*, sondern *plötzlich* ändert, also *gebrochen* oder *unstetig* ist, so ist auch die horizontale Projektion einer solchen Linie eine *gebrochene* oder *unstetige* Linie (Fig. 8); ändert jedoch die vertikale Projektion ihre Richtung nur *allmählich*, oder ist die Richtung der Linie eine *stetig-veränderliche*, so muss auch die Richtung der horizontalen Projektion eine *stetig-veränderliche* sein. Dies gilt z. B. für die Linien $p'1'2'3'4'5'6'$ und $P, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so wie für die Linien $6'r'$ und $6, r$. (Fig. 7 und 8.)

(Taf. 6 bis , Fig. 9 , 10 und 11.)

Aufgabe. Es sind die beiden Projektionen eines senkrechten Kreiszylinders gegeben. Man soll die Mantelfläche desselben entwickeln , und die Gestalt der Entwicklung bestimmen , wenn der obere Theil der Fläche nach einer Linie abgeschnitten wäre , deren vertikale Projektion durch $1'2'3' \dots\dots 12'13'$ dargestellt ist.

Auflösung. Man nehme auf der gegebenen vertikalen Projektion der Linie , nach welcher der obere Theil der Kreiszylinderfläche abgeschnitten werden soll , eine beliebige aber entsprechende Anzahl von Punkten $1'2'3'$ etc. und bestimme die horizontalen Projektionen derselben wie früher gezeigt wurde , wobei zu beachten ist , dass einer jeden vertikalen Projektion zwei horizontale Projektionen entsprechen. Um nun die Mantelfläche des Zylinders entwickeln und die Gestalt der Entwicklung bestimmen zu können , denke man sich denselben als eine regelmässige Säule mit unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ; in Folge dieser Vorstellung ergibt sich , dass die Form der Entwicklung einer Zylinderfläche ebenso wie diejenige einer Säule , ein Rechteck sein muss , dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich der Höhe des Zylinders ist ; ein solches Rechteck ist also zu konstruiren ; um jedoch den Umfang des Zylinders auf eine Linie auftragen und so die Grundlinie des Rechtecks bestimmen zu können , benützt man den Umstand , dass sich sehr kleine Sennen von ihren entsprechenden sehr kleinen Kreisbögen nur so wenig unterscheiden , dass man für die Bögen ohne merklichen Fehler ihre entsprechenden Sennen setzen kann. Man theilt daher den Umfang der Zylinderfläche in 24 oder 48 Theile und trägt die einem solchen Theile entsprechende Senne 24 - oder 48mal auf eine unbestimmte gerade

Linie aa (Fig. 11), errichtet in den Endpunkten a a senkrechte Linien, nimmt eine jede so gross als die Höhe des Zylinders und verbindet ihre Endpunkte. Das so entstehende Rechteck ist die Entwicklung der Zylinderfläche.

Soll nun auf dieser die Lage der Linie bestimmt werden, von welcher die vertikale Projektion $1'2'3' \dots 13'$ gegeben ist, so denke man sich die beiden Senkrechten aa als eine beliebige Seitenkante ($a, a'a'$), nach welcher die Mantelfläche des Zylinders, um dieselbe entwickeln zu können, zerschnitten werden musste, und trage nun die Bögen $a3, 3,4, 4,5$ etc. (Fig. 10) in Figur 11 von a nach 3, von 3 nach 4, von 4 nach 5 etc., oder was dasselbe ist, die Bögen $a23, 23,22, 22,21$ etc. von a nach 23, von 23 nach 22, von 22 nach 21 ff.; alsdann errichte man in allen Theilungspunkten senkrechte Linien und mache diese gleich den Höhen derjenigen Punkte in der vertikalen Projektion (Fig. 9), denen sie entsprechen.

Die in den Punkten 8 und 18 errichteten Senkrechten erhalten demnach die Höhe des Punktes $8'$, da dieser zugleich die vertikale Projektion zu 18 (Fig. 10) ist; die Senkrechte in 13 erhält die Höhe des Punktes $13'$, und auf gleiche Weise erhalten die Senkrechten in aa die Höhe des Punktes $1'$. Hat man auf diese Weise die Höhen aller Senkrechten bestimmt, so verbinde man die Endpunkte derselben, in so weit dieses möglich ist, durch eine stetige Linie.

Bemerkung. Da, wie sich aus Figur 9 ergibt, die vertikale Projektion der Linie, nach welcher man sich den obern Theil der Mantelfläche des Zylinders abgeschnitten denkt, aus einer krummen und einer geraden Linie besteht, welche nicht allmählich in einander übergehen, so kann auch

die Entwicklung dieser Linie keine stetige sein, sondern sie besteht aus 3 Theilen, von denen ein jeder für sich eine stetige Linie bildet, und die beiden äussern dem krummen Theile $1'8'$ der vertikalen Projektion entsprechen, während der mittlere Theil der geraden Linie $8'13'$ der vertikalen Projektion entspricht.

(Taf. 6 bis, Fig. 12 und 13)

Aufgabe. Die beiden Projektionen einer Kugelfläche sind gegeben. Man soll aus der vertikalen Projektion $a'b'$ einer auf dieser Fläche befindlichen Linie die horizontale Projektion $a, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ etc. dieser Linie bestimmen.

Auflösung. Man wähle auf der gegebenen vertikalen Projektion $a'b'$ eine beliebige aber entsprechende Anzahl von Punkten z. B. $a', 1', 2'$ etc., bestimme die horizontalen Projektionen derselben auf früher gezeigte Weise, und verbinde diese sofort durch eine stetige Linie.

Nähere Erklärung der Figuren 12 und 13.

1) Da sich die Punkte a' und b' auf der vertikalen Projektion eines grössten Kreises befinden, so muss die Ebene dieses Kreises mit der vertikalen Projektionsebene parallel sein; die horizontalen Projektionen a und b liegen daher auf einer geraden Linie, welche durch den Punkt m mit der Grundlinie parallel gezogen wurde.

2) Da sich der Punkt $2'$ auf einer geraden Linie befindet, welche durch die vertikale Projektion des Mittelpunktes (m, m') geht und mit der Grundlinie parallel läuft, so muss diese einem Kreise zugehören, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht und mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist; die horizontalen Projektionen $2, 2$, welche der vertikalen Projektion $2'$ entsprechen, müssen daher auch auf der horizontalen Projektion dieses Kreises liegen.

3) Da die Ebene dieses Kreises alle tiefer liegende Kreise, welche durch die Punkte $3', 4', 5', b'$ (Fig. 12) gehen, verdeckt, so ist nur derjenige Theil der horizontalen Projektion $a, 1, 2, 3, 4$ etc. sichtbar, welcher der oberen Hälfte $a'2'$ der gegebenen vertikalen Projektion entspricht.

(Taf. 6 bis, Fig. 14 und 15.)

Aufgabe. Man soll die Gestalt einer Schraubenlinie bestimmen, welche ein Punkt (b', c') Fig. 15 und Fig. 14 beschreibt, wenn die horizontale Projektion $(b, 1, 2, 3, \dots 7)$ der Zylinderfläche, auf welcher er sich bewegen soll, und die Höhe $c'c''$ (Fig. 14) gegeben ist, in welcher er sich nach einem *Umgange* über der horizontalen Projektionsebene befinden muss.

Auflösung. Man theile den Umfang der gegebenen horizontalen Projektion $b, 1, 2, \dots 7$ der Zylinderfläche, so wie die gegebene Höhe $c'c''$, in dieselbe Anzahl gleicher Theile, z. B. in 8 oder 16, und bezeichne die Theilungspunkte auf dem Kreisumfange (Fig. 15) mit $1, 2, 3, \dots 7$ und diejenigen auf der Senkrechten $c'c''$ mit $1'', 2'', 3'', \dots 7''$. Hat nun der Punkt b auf der Mantelfläche des Zylinders einen solchen Weg zurückgelegt, dass die horizontale Projektion desselben gleich dem achten Theile des Kreisumfanges ist, und also die horizontale Projektion des Punktes selbst in 1 liegt, so muss seine Höhe über der horizontalen Projektionsebene gleich dem achten Theile der gegebenen Höhe $c'c''$ sein, und die vertikale Projektion desselben muss sich da befinden, wo die aus 1 auf die Grundlinie senkrecht gezogene Linie $1, 1'$ von der durch $1''$ mit der Grundlinie parallel gezogenen Linie $1''1'$ durchschnitten wird. Hat sich ferner der Punkt b so weit um die Mantelfläche des Zylinders bewegt, dass seine horizontale Projektion in 2 liegt, so muss sich seine vertikale Projektion $2'$ aus dem

Durchschnitte der auf die Grundlinie senkrecht gefällten Linie $2,2'$ und der mit dieser parallel gezogenen Linie $2''2'$ ergeben. Auf gleiche Weise werden auch die übrigen vertikalen Projektionen $4',5'$ etc. des beweglichen Punktes b bestimmt; hat derselbe einen ganzen Umgang zurückgelegt, so muss sich seine horizontale Projektion wieder in b , und seine vertikale Projektion, so wie es die Aufgabe festsetzte, in c'' befinden.

Erster Zusatz. Um die Schraubenfläche darzustellen, welche eine gerade Linie $(b'c', b)$ beschreibt, die auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, konstruirt man die Schraubenlinie, welche ein jeder ihrer beiden Endpunkte (b,c') und (b,b') beschreibt, und verbinde die entsprechenden Wendungspunkte $4'4'$ und die Endpunkte c'',b'' beider Schraubenlinien durch gerade Linien. Kaum dürfte bemerkt werden müssen, dass zur Darstellung der von dem Punkte (b,b') beschriebenen Schraubenlinie, die Höhe $b'b''$ in diejenige Anzahl von gleichen Theilen getheilt werden muss, in welche man den Umfang des Zylinders eingetheilt hat, auf dem sich der Punkt (b,b') befindet.

Zweiter Zusatz. Wenn sich eine von mehreren geraden Linien eingeschlossene ebene Figur, z. B. ein Rechteck $(a'b'c'd', ab)$ so bewegt, dass alle seine Endpunkte Schraubenlinien, folglich alle seine Seiten Schraubenflächen beschreiben, so entsteht ein Schraubenkörper, dessen Gestalt, wie es wohl von selbst klar ist, sich immer nach der Gestalt der sich bewegendenden ebenen Figur richtet. Zur Darstellung der vertikalen Projektion eines solchen im Gebiete des technischen Zeichnens häufig vorkommenden Körpers darf man nur die vertikalen Pro-

jektionen der von seinen Endpunkten beschriebenen Schraubenlinien konstruiren und mittelst dieser die einzelnen Schraubenflächen bestimmen, wobei immer erstens die Frage zu lösen ist, auf welche Weise diese Flächen *begrenzt*, und zweitens welche Theile von den übrigen verdeckt und daher mittelst unterbrochener Linien als unsichtbar dargestellt werden müssen. Diese Fragen aber lösen sich nach den vorhergegangenen Hauptsätzen in allen Fällen sehr leicht und führen je nach Umständen zu anderen Resultaten. In unserer Aufgabe ergibt sich ihre Lösung aus der blossen Ansicht der Figur 14, wo das sich bewegende Rechteck ($a b, a' b' c' d'$) in 9 verschiedenen Hauptlagen dargestellt ist.

DRITTES KAPITEL *).

GEOMETRISCHE UND ISOMETRISCHE PROJEKTIONEN RECHTUVINKLICH BEGRENZTER KÖRPER.

(Taf. 7, Fig. 1 und 2.)

Aufgabe. Eine regelmässige vierseitige Säule steht auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht, während

*) Mit diesem Kapitel beginnt der Unterricht in der geometrischen und isometrischen Projektionslehre im engern Sinne, so dass diejenigen Lehrer, welche einer durchaus *praktischen Unterrichtsmethode* den Vorzug vor der *theoretischen* geben, den Unterricht mit diesem Kapitel anzufangen haben, wobei jedoch, wie sich's von selbst versteht, die wichtigsten Definitionen vorausgeschickt und von allem Folgenden nur die Resultate ausgewählt werden dürfen.

zwei ihrer Seitenflächen mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind. Man soll die horizontale und die vertikale Projektion dieser Säule konstruieren.

Auflösung. Man ziehe parallel mit der Grundlinie eine Gerade ab , nehme diese so gross als eine der beiden Seiten der Grundfläche des vierseitigen Prismas und konstruiere über dieser nach den bekannten Regeln ein Quadrat $abcd$. Dieses Quadrat ist die *horizontale Projektion* der gegebenen Säule.

Um nun hieraus die vertikale Projektion $a'a'b'b'$ zu erhalten, ziehe man aus d und c senkrecht auf die Grundlinie die Linien $a'a'$ und $b'b'$, trage auf jede derselben die Höhe der Säule auf und verbinde die erhaltenen Endpunkte a' und b' durch die Gerade $a'b'$. Das *Rechteck* $a'a'b'b'$ ist alsdann die *vertikale Projektion* der rechtwinklichen Säule.

Erklärung. Da die Grundfläche der Säule in der horizontalen Projektionsebene liegt, so müssen die vier Seitenflächen senkrecht auf derselben stehen, und demnach (Siehe Hauptsatz 8) ihre horizontalen Projektionen gerade Linien sein. Weil nun aber ferner die Seiten der *Grundflächen* der Säule ebenfalls in diesen Seitenflächen liegen, so müssen die horizontalen Projektionen der Grundflächen von denjenigen der Seitenflächen begrenzt sein, und folglich mit diesen zusammenfallen; die Gestalt ihrer gemeinsamen Projektion muss endlich ein Quadrat sein, weil die eine der beiden quadratförmigen Grundflächen in der horizontalen Projektionsebene liegt und daher ihre eigene Projektion bildet. Endlich müssen die Linien ab und dc mit der Grundlinie parallel sein, weil die Seitenflächen, deren horizontale Projektionen sie bilden, mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind.

Dass die vertikale Projektion der Säule ein Rechteck sein muss, lässt sich auf gleiche Weise auseinandersetzen. Da nämlich sowohl die beiden Grundflächen ($a b c d$, $a' b'$) als auch die beiden Seitenflächen ($a d$, $a' a'$) und ($b c$, $b' b'$) auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen, so müssen die vertikalen Projektionen dieser 4 Ebenen gerade Linien sein, und mit diesen die vertikalen Projektionen der 4 Seiten der parallelen Seitenflächen ($a b$, $a' a' b' b'$) und ($c d$, $a' a' b' b'$) zusammenfallen; weil nun aber die vertikalen Projektionen solcher Ebenen, welche mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind, die wahre Gestalt dieser Ebenen angeben, so muss die vierseitige Figur $a' a' b' b'$ einer jeden der parallelen Seitenflächen gleich und folglich ein Rechteck sein.

Zusatz. Die vertikale Projektion $a' a' b' b'$ (Fig. 1) enthält die Länge ($a' b'$) und die Höhe ($a' a'$ oder $b' b'$), die horizontale Projektion hingegen die Länge ($a b$) und die Breite ($b c$) der Säule.

(Taf. 7, Fig. 3 und 4.)

Aufgabe. Eine rechtwinklich begränzte Säule ist so auf der horizontalen Projektionsebene aufgestellt, dass die durch zwei gegenüberliegende Kanten (d , $d' d'$) und (b , $b' b'$) gelegte Ebene mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Man soll die horizontale und die vertikale Projektion der Säule konstruiren.

Auflösung. Mit der halben Diagonale einer der beiden Grundflächen beschreibe man einen Hilfskreis $a b c d$, ziehe einen Durchmesser $b d$, errichte in der Mitte desselben eine Senkrechte $a c$ und verbinde die Endpunkte a, b, c und d durch gerade Linien. Das hiedurch entstehende regelmässige Viereck ist die *horizontale Projektion* der Säule.

Zur Bestimmung der vertikalen Projektion ziehe man sofort aus den Punkten b, a und d senkrecht auf die Grundlinie die Linien $b'b'$, $a'a'$ und $d'd'$, trage die Höhe der Säule auf den beiden äusseren Senkrechten $d'd'$ und $b'b'$ auf und ziehe die Verbindungslinie $d'a'b'$.

Erklärung. Da die Stellung der rechtwinklichen Säule auf der horizontalen Projektionsebene die nämliche wie in der vorhergehenden Aufgabe ist, so sind auch die Gründe, warum die horizontale Projektion der Säule ein Quadrat sein muss, ganz dieselben wie diejenigen, welche bereits in der Erklärung der vorhergehenden Aufgabe angeführt wurden.

Was die Konstruktion der vertikalen Projektion $d'd'b'b'$ betrifft, so hat man sich nur des Hauptsatzes 3 Unterfall 2 zu erinnern, indem die vier Seitenkanten a, b, c, d (Fig. 4) der Säule auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht stehen, und demnach ihre vertikalen Projektionen $d'd'$, $a'a'$ etc. auf der Grundlinie senkrecht stehen müssen.

Einzig muss noch bemerkt werden, dass die vertikalen Projektionen der beiden Kanten a und c (Fig. 4) zusammenfallen müssen, weil beide Kanten in einer Ebene liegen, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen, und nach Hauptsatz 7 die vertikale Projektion einer solchen Ebene, folglich auch aller darin enthaltenen Linien, eine Linie ist, welche auf der Grundlinie senkrecht.

Zusatz. Wenn die Höhe der in Fig. 3 und 4 dargestellten rechtwinklichen Säule gleich der Seite ihrer quadratförmigen Grundfläche, also die Säule selbst ein *Würfel* wäre, so würde ihre vertikale Projektion durch die Figur $d'b'f'h'$ dargestellt werden und die (nicht gezogene) Linie $h'b'$ wäre die vertikale Projektion der Diagonale des Würfels.

(Taf. 7, Fig. 3 — 6.)

Aufgabe. Man soll die in den Figuren 3 und 4 dargestellte rechtwinkliche Säule um den in der horizontalen Projektionsebene befindlichen Punkt b so drehen, dass ihre untere Grundfläche mit der horizontalen Projektionsebene einen bestimmten Winkel m (Fig. 5) bildet, und die durch die Kanten d , $d'd'$ und b , $b'b'$ gelegte Ebene während der Drehung mit der vertikalen Projektionsebene parallel bleibt.

Auflösung. Man trage den gegebenen Winkel m von einem beliebigen Punkte b' an die Grundlinie (Fig. 5), konstruiere über dem Schenkel $b'd'$ das Rechteck $b'd'd'b'$ gleich dem Rechtecke $b'd'd'b'$ (Fig. 3) und ziehe durch die Mitten der Seiten $b'd'$, $b'd'$ die Linie $a'a'$; die hiedurch entstehende Figur ist die vertikale Projektion der Säule nach der Drehung um den Winkel m .

Um nun hieraus auch die horizontale Projektion zu erhalten, ziehe man durch alle Punkte der Fig. 4 Hilfslinien *parallel* mit der Grundlinie, und ebenso durch alle Punkte der Fig. 5 Hilfslinien *senkrecht* auf die Grundlinie. Je *eine Parallele* und *eine Senkrechte*, welche durch die Projektionen desselben Punktes in Fig. 4 und Fig. 5 gezogen wurden, bestimmen alsdann die horizontale Projektion desselben Punktes in Fig. 6. So ergibt sich aus der Durchschneidung der Parallelen aa (Fig. 4 und 6) und der Senkrechten $a'a'$, welche durch den unteren Punkt der Kante $a'a'$ (Fig. 5) gezogen wurde, die horizontale Projektion des unteren Punktes a ; verbindet man die horizontalen Projektionen aller Punkte durch entsprechende Linien und bezeichnet man die verdeckten Linien durch unterbrochene Striche, so ergibt sich als horizontale Projektion der schiefstehenden Säule die Fig. 6.

Aus einer aufmerksamen Betrachtung dieser Projektion ergibt sich 1) dass alle horizontalen Projektionen der Seitenkanten, nämlich aa , bb , cc und dd einander gleich und parallel sind; 2) dass die 4 Seiten beider Grundflächen der Säule ebenfalls einander gleich und je zwei und zwei gegenüberliegende Seiten mit einander parallel sind; 3) dass der Winkel abc von der Linie bb , wenn man sich diese gegen die Linke verlängert denkt, in zwei gleiche Theile getheilt wird.

Erklärung. Weil die Aufgabe zur Bedingung setzt, dass die durch die Kanten (d , $d'd'$ und b , $b'b'$) gehende Ebene (Fig. 4) auch während und nach der Drehung mit der vertikalen Projektionsebene parallel bleibe, so müssen die beiden Grundflächen der Säule, welche auf dieser Ebene senkrecht stehen, auch auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen, und aus diesem Grunde ihre vertikalen Projektionen zwei gerade Linien sein, welche mit der Grundlinie denselben Winkel bilden, als die untere Grundfläche mit der horizontalen Projektionsebene. Betrachtet man nun die Ebene $b'd'$ (Fig. 5), in welcher sich die Grundfläche der Säule befindet, als eine neue horizontale Projektionsebene, so ergibt sich, dass die Säule in Folge dieser Voraussetzung sowohl zu dieser neuen horizontalen wie auch zur vertikalen Projektionsebene ganz dieselbe Lage besitze, wie in der vorhergehenden Aufgabe, und es muss daher z. B. die Kante d , $d'd'$ (Fig. 3 und 4), welche auf der neugedachten horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, eine vertikale Projektion besitzen, welche auf der neuen Grundlinie $b'd'$ (Fig. 5) senkrecht steht und darum nach $d'd'$ fällt; die vertikale Projektion der Säule nach der Drehung muss daher über der Linie $b'd'$ (Fig. 5) ganz dieselbe Gestalt besitzen, als die vertikale Projektion der Säule vor der Drehung über der Linie $b'd'$ (Fig. 3).

Die zur Bestimmung der horizontalen Projektion (Fig 6) befolgte Konstruktionsweise ergibt sich aus folgenden Betrachtungen :

1) Alle den vertikalen Projektionen b', a', d' etc. entsprechenden horizontalen Projektionen müssen sich nach Hauptsatz 1 auf Linien befinden, welche von den vertikalen Projektionen senkrecht auf die Grundlinie gefällt werden.

2) Da bei der Drehung der Säule alle Punkte derselben sich in Ebenen bewegt haben müssen, welche mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind und die horizontalen Projektionen solcher Ebenen als gerade Linien erscheinen, welche mit der Grundlinie parallel laufen, so müssen sich auch die horizontalen Projektionen aller Punkte nach der Drehung in Hilfslinien befinden, welche durch sie mit der Grundlinie parallel gezogen werden. Die horizontale Projektion eines jeden Punktes der Säule nach der Drehung muss sich daher da befinden, wo sich eine *parallele* und eine *senkrechte Hilfslinie*, welche durch die Projektionen dieses Punktes in Fig. 4 und 5 gezogen wurden, durchschneiden.

Prinzip der isometrischen Projektionslehre.

(Taf. 7, Fig. 7 und 8.)

Fig. 7 und 8 zeigen die beiden Projektionen einer regelmässigen vierseitigen Säule und eines Würfels, wenn der Drehungswinkel m (Fig. 7) eine solche Grösse erreicht hat, dass die *Diagonale des Würfels auf der horizontalen Projektionsebene* senkrecht steht; bei dieser Stellung des Würfels hat seine horizontale Projektion die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre *äussere Begränzung* ein regelmässiges Sechseck bildet, während sich die horizontalen Projektionen ab , bc und bf der drei Kanten,

welche sich in dem Punkte (b, b' , Fig. 7 und 8) vereinigen, je 2 und 2 unter einem Winkel von 120 Graden berühren und *einander gleich sind*. Diese Gleichheit der Kanten ist eine nothwendige Folge des Umstandes, dass die Diagonale des Würfels auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, weil alsdann die Kanten mit der horizontalen Projektionsebene gleiche Winkel bilden und demzufolge auch in demselben Verhältnisse verkürzt werden müssen. (Den strengen Beweis sehe man weiter unten.)

Weitere Betrachtungen über diesen Fall.

1) Da nach Hauptsatz 4 alle parallele Linien auch parallele Projektionen besitzen, und diese Projektionen in demselben Verhältnisse zu einander stehen müssen wie die Linien selbst, und da ferner die horizontalen Projektionen aller Kanten eines Würfels, dessen Diagonale auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, einander gleich sind, so braucht man nur die horizontale Projektion *einer* der drei Kanten ab , bc und bf zu kennen, um hieraus die Projektion des Würfels selbst zu konstruiren; denn gesetzt man kenne die Grösse der horizontalen Projektion ab , so dürfte man an diese nur einen Winkel abc von 120° legen, den Schenkel $bc = ab$ nehmen und sofort eine dritte Linie $bf = ab = bc$ ziehen, welche sowohl mit ab , als mit bc einen Winkel von 120° Graden bildet, oder was dasselbe ist, den Winkel abc halbirt; konstruirt man nun über den beiden Seiten ab und bc das Rhombus $abcd$, so ergibt sich die horizontale Projektion der unteren Grundfläche des Würfels, und wenn man sofort durch c , d und a parallel mit der Seitenkante bf die Linien dh , cg und ae zieht, diese $= bf$ nimmt und zuletzt die Verbindungslinien he , hg , gf und ef zieht, so ergibt sich die horizontale Projektion des Würfels selbst.

2) Da die Hauptbestimmung einer jeden Projektion darin besteht, dass durch diese der dargestellte Körper selbst vollkommen ersetzt wird, und demnach diejenigen Projektionen, welche die Hauptdimensionen der Körper in ihrer wahren Grösse und nicht verkürzt angeben, offenbar den grössten praktischen Nutzen haben müssen, so wird es bei der Darstellung eines Würfels um Vieles zweckmässiger sein, wenn man sich statt des gegebenen Würfels, der auf die oben bezeichnete Weise dargestellt werden soll, und dessen Kanten demnach verkürzt werden müssten, einen anderen Würfel denkt, dessen Kanten eine solche Grösse besitzen, dass ihre horizontalen Projektionen, wenn die Diagonale dieses Würfels auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, so gross als die Kanten des gegebenen darzustellenden Würfels erscheinen. Die auf solche Weise entstehende horizontale Projektion wird alsdann nicht nur dieselbe Form haben, als wenn der gegebene Würfel selbst dargestellt worden wäre, sondern es werden auch alle Linien, welche die horizontalen Projektionen der Würfelkanten bezeichnen, die wahren Längen dieser Kanten bestimmen.

Eine solche Projektion ergibt sich aber sehr leicht auf folgende Weise:

Man beschreibe mit einer Kante des darzustellenden Würfels, z. B. mit a, b (Fig. 4), aus einem beliebigen Punkte b (Fig. 11) einen Kreis $a d c g f e$, ziehe aus dem Mittelpunkte b eine Vertikale b, d , trage den Radius d, b von d nach d, c und nach d, a , ziehe die Linien b, c , b, a d, c und d, a . Dieses Rhombus ist alsdann die untere Grundfläche des Würfels und die Linien c, b und a, b , so wie die Linien c, d und a, d vereinigen sich unter Winkeln von 120° , während die beiden anderen Winkel b, c, d und $b, a, d = 60^\circ$ sind. Um endlich die Konstruktion des Würfels zu vollenden,

ziehe man durch alle Punkte (a, b, c, d) der unteren Grundfläche Linien parallel mit d, b , nehme eine jede derselben $= a, b$ oder $= b, c$ und verbinde die erhaltenen Endpunkte durch die Linien g, h , h, e , e, f und f, g . Das Rhombus h, e, f, g ist alsdann die obere Grundfläche des Würfels, während die beiden Rhomben h, d, c, g und h, d, a, e die sichtbaren und die Rhomben f, g, c, b und f, e, a, b die beiden unsichtbaren Seitenflächen bilden.

3) Denkt man sich eine im Raume befindliche gerade Linie C, D (Fig. 51 b, Taf. 5) in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt und von allen Theilungspunkten senkrechte Linien auf die horizontale Projektionsebene gezogen, so wird auch die horizontale Projektion c, d dieser Linie in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt.

Hieraus ergibt sich, dass die horizontale Projektion einer Linie, welche aus 2, 3 oder 4 Theilen besteht, zwei-, drei- oder viermal so gross ist als dann, wenn die Linie nur aus 1 Theile besteht, und im Allgemeinen, dass sich die horizontalen Projektionen zweier Theile einer Linie zu einander und zur horizontalen Projektion der Linie, ebenso verhalten müssen, wie sich die Theile selbst zu einander und zur Linie selbst verhalten. Dieses festgehalten, so ist klar, dass wenn eine regelmässige vierseitige Säule (Fig. 7 und 8) eine solche Lage zur horizontalen Projektionsebene besitzt, dass die 3 Hauptkanten des in ihr befindlichen Würfels gleich gross erscheinen, die Höhenkante (b, b , $b'b'$) der Säule, welche der Höhenkante ($b'f'$, b, f) des Würfels entspricht, eine horizontale Projektion b, b besitzen muss, welche sich zu der horizontalen Projektion b, f der Würfelkante ebenso verhält, wie die Höhenkante der Säule zu der Höhenkante des Würfels. Wäre demnach z. B. die Höhenkante der Säule 2-, $2\frac{1}{2}$ - oder 3mal grösser als die Höhenkante des Würfels, so müsste auch die horizontale Projektion der

ersteren 2-, $2\frac{1}{2}$ - oder 3mal grösser sein, als die horizontale Projektion der Höhenkante des Würfels, oder was dasselbe ist, als eine der beiden Kanten ihrer Grundfläche.

Hieraus ergibt sich daher, dass bei der in Fig. 7 angezeigten Stellung einer Säule zur horizontalen Projektionsebene, die horizontalen Projektionen ihrer 3 Hauptkanten wie bei dem Würfel ganz in demselben Verhältnisse verkürzt werden.

Zur Darstellung einer regelmässigen vierseitigen Säule kann man sich daher desselben Kunstgriffes, wie bei der Darstellung eines Würfels bedienen, der, wie schon erwähnt, darin besteht, dass nicht die *gegebene Säule*, sondern eine *hypothetische* (gedachte) dargestellt wird, deren 3 Hauptkanten so gross sind, dass die horizontalen Projektionen derselben, wenn die Säule die in Fig. 7 angezeigte Stellung erhält, den 3 Hauptkanten der *gegebenen Säule* gleich werden.

Um eine gegebene regelmässige vierseitige Säule nach diesem Prinzip darzustellen, hat man ganz dieselbe Konstruktion auszuführen, wie wir sie bereits oben beschrieben haben. Man beschreibe nämlich mit einer Seite (b,a) der Grundfläche (Fig. 4) aus einem beliebigen Punkte b (Fig. 11) einen Kreisbogen a,d,c , ziehe die vertikale Hilfslinie b,d , trage b,a von d nach d,c und von d nach d,a , vollende das Rhombus a,b,c,d , ziehe durch die Eckpunkte desselben mit d,b parallele Linien c,c , d,d , a,a , b,b , trage auf eine jede derselben die Höhe b',b' (Fig. 3) der gegebenen Säule auf, und verbinde zuletzt die Endpunkte a , b , c und d durch gerade Linien. Die aus dieser Konstruktion hervorgegangene Figur a,b,c,d , a,b,c,d ist nun zwar nicht die horizontale Projektion der gegebenen, sondern diejenige einer gedachten oder hypothetischen Säule, allein die Gestalt dieser

Projektion ist der Gestalt der horizontalen Projektion der gegebenen Säule durchaus ähnlich und besitzt den Vorzug, dass die Projektionen aller Kanten, den Kanten der gegebenen Säule gleich sind.

4) Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergibt sich nun von selbst, dass wenn man eine vierseitige rechtwinkliche Säule (Fig. 12 und 13), deren 3 Hauptkanten cb , cd und $(c, b' b')$ ungleich gross sind, und sich zu einander wie die Zahlen 3, 4 und 6 verhalten, auf der horizontalen Projektionsebene so aufstellt, dass die drei horizontalen Projektionen der Kanten eines in dieser Säule befindlichen Würfels gleich gross sind, also in demselben Verhältnisse *verkürzt werden*, alsdann die horizontalen Projektionen der 3 Hauptkanten der gegebenen Säule ebenfalls in *demselben Verhältnisse verkürzt sein müssen*, und dass sie sich daher ebenso zu einander verhalten, wie die entsprechenden Kanten selbst, nämlich wie die Zahlen 3, 4 und 6. Man kann sich daher auch in diesem Falle des oben angegebenen Kunstgriffes bedienen und statt der horizontalen Projektion der gegebenen rechtwinklichen Säule diejenige einer hypothetischen Säule konstruiren, welche der gegebenen ähnlich ist, und deren 3 Hauptkanten so gross sind, dass ihre horizontalen Projektionen, wenn die Säule zur horizontalen Projektionsebene die schon öfters bezeichnete Lage besitzt, den 3 entsprechenden Hauptkanten der gegebenen Säule gleich sind.

Um nun eine solche Projektion zu erhalten, ist folgende Konstruktion auszuführen. Man beschreibe mit einer beliebigen Linie z. B. mit der Kante c, d (Fig. 13) aus einem beliebigen Punkte c einen unbestimmten Kreisbogen d, m, n , ziehe durch c eine vertikale Linie cm , beschreibe aus m mit dem Radius des Kreises die Bögen d und n , und ziehe die Linien c, d und c, n . Nun trage

man die Kante c,b (Fig. 13) auf c,n von c nach b (Fig. 14), konstruirt über den beiden Seiten c,d und c,b das Parallelogramm c,d,a,b , ziehe durch die Eckpunkte desselben die Linien d,d , a,a , c,c und b,b parallel mit m,c , trage auf eine jede derselben die Höhe b',b' (Fig. 12) der gegebenen Säule auf und ziehe endlich die Verbindungslinien a,d , d,c , c,b und b,a .

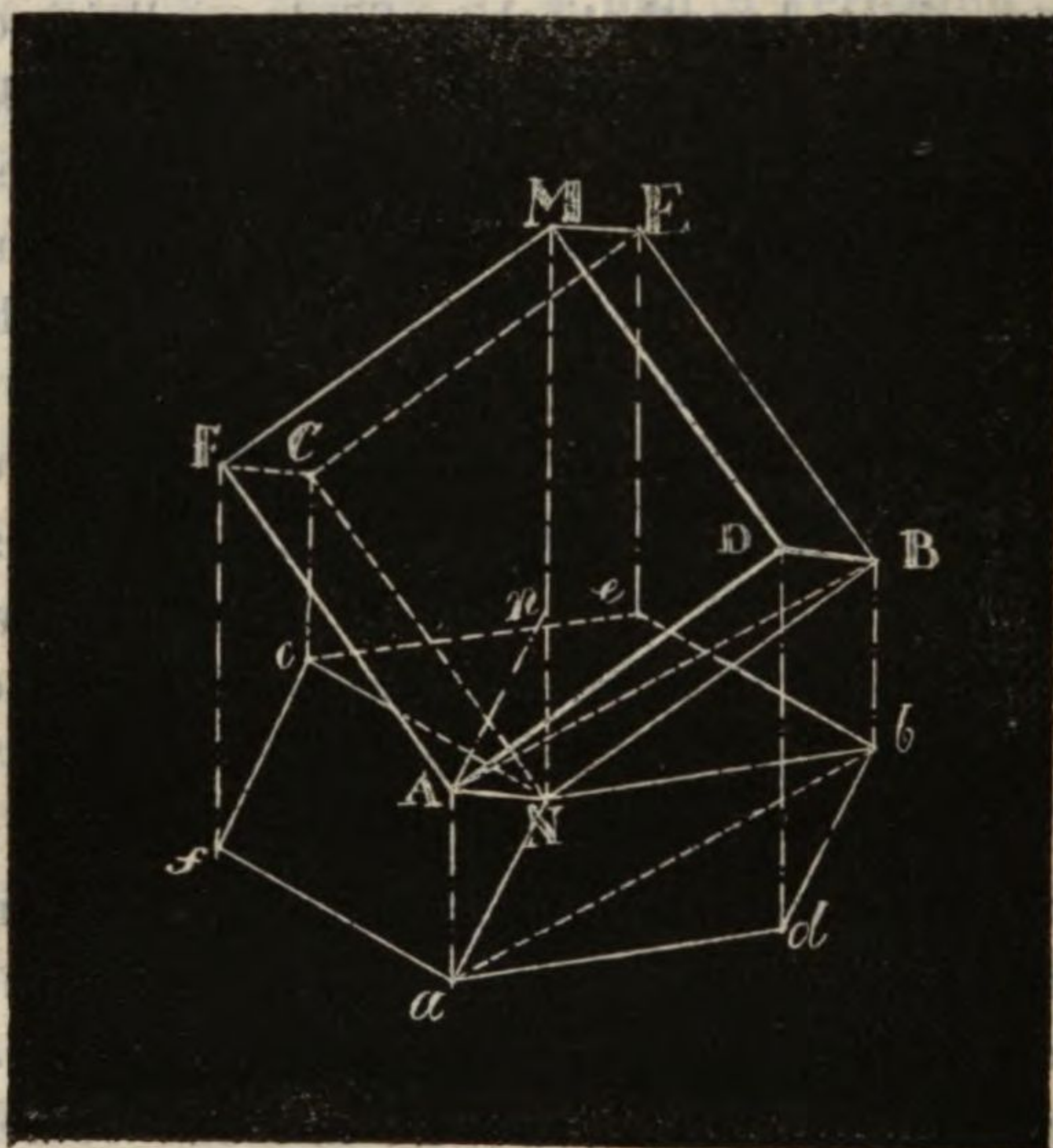
Die so erhaltene Figur ist nun zwar die horizontale Projektion einer hypothetischen Säule; allein diese ist der horizontalen Projektion der gegebenen vollkommen ähnlich, und die Projektionen aller Kanten sind den Kanten der gegebenen Säule selbst gleich. Die gegebene Säule wird demnach durch die Projektion einer ihr ähnlichen *hypothetischen* vollkommen ersetzt.

Bemerkung. Obgleich die Projektion (Fig. 14) der Säule (Fig. 12 und 13) nicht angehört, so nennt man sie dennoch die *isometrische* *) *Projektion* derselben, weil die Projektionen aller Kanten das wahre Maass derselben angeben. Diejenigen 3 Kanten, welche sich in dem Mittelpunkte c des Kreisbogens d,m,n vereinigen, nennt man die *isometrischen Axen* (Längen-, Breiten- und Höhenaxe), und die drei Ebenen b,c,c , d,c,c und d,c,b , welche durch je zwei Axen gelegt sind, die *isometrischen Hauptebenen*. Alle Linien, welche mit den isometrischen Axen parallel sind, heissen *isometrische Linien* oder *isometrische Ordinaten*, und alle Ebenen, welche mit den isometrischen Hauptebenen parallel sind, *isometrische Ebenen*. Es ist übrigens gleichgültig, durch welchen Punkt die isometrischen Axen gehen, und es können irgend drei isometrische Linien, welche sich in demselben Punkte vereinigen, nach Belieben als die isometrischen Axen angenommen werden.

*) (*ισόμετρος* gleich an Maass.)

**Streng - mathematische Begründung des Prinzipes
der isometrischen Projektionslehre.**

Da die Diagonale M,N eines Würfels (Siehe beistehende Figur) mit den 3 Seitenkanten N,A , N,B und



N,C , welche sich in dem Endpunkte N der Diagonale vereinigen, und mit den 3 Flächendiagonalen M,A , M,B , M,C drei kongruente Dreiecke bildet, so müssen auch die Winkel, welche die Diagonale M,N mit den 3 Kanten N,A , N,B und N,C bildet einander gleich sein. Stellt man daher den Würfel auf der horizontalen Projektionsebene so auf, dass die Diagonale des Würfels auf dieser Projektionsebene senkrecht steht, so müssen die Winkel, welche die Kanten N,A , N,B und N,C mit ihren hori-

zontalen Projektionen $N a$, $N b$ und $N c$ bilden ebenfalls einander gleich sein, und es muss sich hieraus sofort auch die Gleichheit der Projektionen N, a , N, b und N, c ergeben, indem die rechtwinklichten Dreiecke N, A, a , N, B, b und N, C, c die Seiten N, A , N, B und N, C und die spitzen Winkel A, N, a , B, N, b und C, N, c gleich haben, und folglich kongruent sein müssen.

Da nun die 3 oberen Würfelkanten M, D , M, E und M, F mit den 3 unteren parallel und gleich sind, und nach Hauptsatz 4 parallele und gleiche Linien auch parallele und gleiche Projektionen haben, so muss die horizontale Projektion der Kante M, D mit derjenigen von N, C , die horizontale Projektion von M, E mit der von N, A , und endlich die horizontale Projektion von M, F mit der von N, B parallel sein; und es müssen endlich aus diesem Grunde, da die Projektion des Punktes M mit derjenigen des Punktes N zusammenfällt, die Projektionen der oberen Kanten M, D , M, E und M, F mit denen der unteren Kante oder, wie es in der That stattfindet, mit ihren Verlängerungen zusammenfallen.

Es wäre somit bewiesen, dass die Projektionen der 6 Kanten eines Würfels, dessen Diagonale auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, auch gleich lang und folglich in demselben Verhältnisse verkürzt sind.

Es kann aber auch zweitens nachgewiesen werden, dass die horizontalen Projektionen der 3 unteren und der 3 oberen Würfelflächen *Rhomben* sein müssen, deren innere Winkel abwechselnd durch Bögen von 120° und 60° gemessen werden.

Da nämlich die Senkrechten A, a , B, b und C, c wegen der Congruenz der rechtwinklichten Dreiecke N, A, a , N, B, b und N, C, c einander gleich sind, so müssen auch die Flächendiagonalen A, B , B, C und A, C mit ihren horizon-

talenen Projektionen a,b , b,c und a,c und folglich auch mit der horizontalen Projektionsebene selbst parallel sein. Nach Hauptsatz 2 sind daher die horizontalen Projektionen a,b , b,c und a,c den Flächendiagonalen A,B , B,C und A,C und somit auch einander selbst gleich. Die Dreiecke a,N,b , b,N,c und c,N,a sind daher wegen der Gleichheit ihrer Seiten mit einander kongruent, und ein jeder der drei Winkel a,N,c , b,N,c und c,N,a ist dem dritten Theile von 4 Rechten gleich, oder sein Mass ist ein Kreisbogen von $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

Welches aber werden nun die Projektionen der drei unteren und der drei oberen Würfelflächen sein? Da die Kante DA gleich und parallel mit der Kante N,B , und da B,D gleich und parallel mit der Kante AN ist, so müssen auch die horizontalen Projektionen der Kanten A,D und B,D den horizontalen Projektionen der Kanten B,N und A,N gleich sein, folglich weil $a,N = b,N$, so muss auch $a,d = b,N = a,N$ und $b,d = a,N = b,N = a,d$ sein; die Projektion a,N,b,d der Würfelfläche A,N,B,D ist daher ein Rhombus, dessen Winkel b,N,a und b,d,a durch Kreisbögen von 120° und dessen Winkel d,b,N und d,a,N durch Kreisbögen von 60° gemessen werden. Da es sich mit den übrigen Würfelflächen auf ganz gleiche Weise verhält, so ergibt sich hieraus, dass sowohl die horizontalen Projektionen der drei unteren, wie diejenigen der drei oberen Würfelflächen drei nebeneinanderliegende Rhomben sind, deren Begrenzung ein regelmässiges Sechseck sein muss, weil, wie leicht einzusehen, sowohl alle Seiten als alle eingeschlossenen Winkel einander gleich sind.

Erste Bemerkung. Setzt man die Seite des Würfels = 1 und zieht man (Siehe obige Figur) die Linie A,n parallel mit a,N , so wird A,n auf M,N senk-

recht stehen, und man erhält folgende Proportionen:

$$N,n : A,n = A,n : (M,N - N,n) \quad (1)$$

$$\text{und } N,n : A,N = A,N : N,M \text{ oder } (2)$$

$$(2^a) N,n : 1 = 1 : \sqrt[3]{3}, \text{ woraus } N,n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} =$$

$\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$ folgt. Setzt man diesen Werth in Proportion

$$(1), \text{ so ergibt sich } \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} : A,n = A,n : \frac{2}{3}\sqrt[3]{3} \text{ folg-}$$

$$\text{lich: } \frac{1}{A,n} = \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3} \text{ und } A,n = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Sollen daher die horizontalen Projektionen der Kanten eines hypothetischen Würfels, dessen Diagonale auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, so gross als die $= 1$ gesetzten Kanten eines gegebenen Würfels erscheinen, so müssen die Kanten (k) desselben so gross sein, dass folgende Proportion stattfindet:

$$k : 1 = 1 : \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \text{ und es ist daher}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Zweite Bemerkung. Um den Winkel m (Fig. 7) zu bestimmen, welchen die Grundfläche des Würfels mit der horizontalen Projektionsebene bildet, setze man wie früher die Seite des Würfels $= 1$; alsdann ist die Diagonale einer Würfelfläche $= \sqrt{2}$ und $\text{tang. } m = \sqrt{2}$, folglich $\log. \text{ tang. } m = \frac{\log. 2}{2} =$

$$\frac{0,30103}{2} = 0,1505, \text{ folglich } m \text{ nahezu } = 54^\circ 44'.$$

(Taf. 7, Fig. 9 und 10.)

Wenn die rechtwinkliche Säule (Fig. 3 und 4) so weit um den Punkt (b, b') gedreht wird, dass die untere wie die obere Grundfläche mit der horizontalen Projektionsebene einen rechten Winkel bildet, und nach

der Drehung die durch die Kanten $(d, d' d')$ und $(b, b' b')$ gelegte Ebene immer noch mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist, so stehen die Grundflächen der Säule auf den beiden Projektionsebenen senkrecht, während alle Seitenkanten mit den Projektionsebenen zugleich parallel sind. Die vertikalen wie die horizontalen Projektionen der Grundflächen sind daher gerade Linien, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen, während die vertikalen und horizontalen Projektionen der Seitenkanten Linien sind, welche mit der Grundlinie parallel laufen.

Beide Projektionen ergeben sich auf folgende Weise:

1) Konstruktion der vertikalen Projektion. Man errichte eine Linie b', d' (Fig. 9) senkrecht auf der Grundlinie, mache dieselbe so gross wie b', d' (Fig. 3), ziehe d', d' parallel mit der Grundlinie, nehme b', b' und d', d' (Fig. 9) gleich b', b' und d', d' (Fig. 3), ziehe b', d' , halbire die Linien $b'd', b'd'$ in den Punkten a', a' und ziehe die Linie a', a' .

2) Konstruktion der horizontalen Projektion. Man verlängere die Linien c, c , d, d und a, a (Fig. 4, 6 und 8) und errichte in den Punkten b', b' (Fig. 9) senkrecht auf der Grundlinie die Linien b', c, a , b', c, a . Hieraus ergibt sich die Figur $c a a c$, als die horizontale Projektion der rechtwinklichen Säule (Fig. 3 und 4), wenn die Grundflächen derselben mit der horizontalen Projektionsebene rechte Winkel bilden.

Bemerkung. Die in den Figuren 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8, 9 und 10 ausgeführten Projektionen einer regelmässigen vierseitigen Säule, wenn dieselbe zur horizontalen Projektionsebene verschiedene Stellungen hat, geben eine hinreichende Ueberzeugung, dass es unter den unendlich vielen Stel-

lungen der Säule zur horizontalen Projektionsebene nur eine einzige geben kann, in welcher die drei Hauptkanten der Säulen auf gleiche Weise verkürzt erscheinen, diejenige nämlich, wo die Diagonale des in die Säule eingeschriebenen Würfels auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht.

Zweite Bemerkung Aus der Anschauung dieser Figuren ergibt sich ferner, dass die horizontale Projektion der oberen Grundfläche der Säule um so grösser erscheint, je kleiner der Winkel ist, den die untere Grundfläche mit der horizontalen Projektionsebene bildet, während die horizontalen Projektionen der Seitenflächen wie in Fig. 4 in Linien zusammenfallen, oder sich als schmale Parallelogramme darstellen; je grösser aber der Winkel m wird, um so kleiner werden die horizontalen Projektionen der Grundflächen und um so grösser diejenigen der Seitenflächen, bis sie bei der in Fig. 7 bezeichneten Stellung der Säule in demselben Verhältnisse ausgedehnt erscheinen. Wird aber der Winkel m noch grösser, so zeigen sich die horizontalen Projektionen der Grundflächen als immer schmalere Rhomben, deren 2 stumpfere Winkel sich je mehr und mehr 2 Rechten nähern, während die spitzeren Winkel auf gleiche Weise kleiner werden, bis sie endlich bei der in Fig. 9 angezeigten Stellung der Säule in gerade Linien zusammenfallen, die man als Rhomben betrachten kann, deren stumpfe Winkel $= 2$ Rechten sind. In diesem Falle aber zeigen sich die horizontalen Projektionen am ausgedehntesten.

Dritte Bemerkung. In allen horizontalen Projektionen (Fig. 6, 8 und 10) der regelmässigen vierseitigen

Säule sind die Kanten b,c , b,a , c,d und d,a in demselben Verhältnisse verkürzt, während die Höhenkante b,b immer den Winkel halbiert, der von denjenigen Seiten der Grundfläche gebildet wird, welche sich mit der Höhenkante vereinigen. Wir werden von dieser Bemerkung später eine wichtige Anwendung machen.

(Taf. 7, Fig. 15, 16 und 17.)

Aufgabe. Man soll die isometrische Projektion eines rechtwinklich begränzten säulenartigen Körpers konstruiren, wenn dessen beide Projektionen (Fig. 15 und 16) gegeben sind.

Auflösung. Man umgebe die horizontale Projektion mit einem Rechtecke a,f,o,n , was durch die Verlängerung der Seiten a,m , f,g , i,k und a,b geschieht, und betrachte dieses Rechteck als die horizontale Projektion einer rechtwinklichen vierseitigen Säule, welche mit dem säulenartigen Körper die gleiche Höhe besitze. Man konstruire sofort die isometrische Projektion o,n,a,f (Fig. 17) der Grundfläche dieser Säule auf die oben gezeigte Weise, trage (mit Anwendung des Hauptsatzes 4) die Linien a,m und f,g , a,b und n,k , f,e und i,o (Fig. 16) nach a,m und f,g , a,b und n,k , f,e und i,o (Fig. 17), und ziehe durch die erhaltenen Punkte parallele Linien mit den Seiten a,f und a,n . Endlich trage man noch b,c und e,d (Fig. 16) nach b,c und e,d (Fig. 17) und ziehe die Linie d,e . Auf diese Weise ergibt sich die isometrische Projektion der Grundfläche des gegebenen säulenartigen Körpers. Da nun die Seitenkanten desselben mit den Seitenkanten der rechtwinklichen Säule, in welche man sich den gegebenen Körper eingeschlossen denkt, parallel ist, und da ferner die isometrische Projektion der durch den Punkt

o gehenden Seitenkante dieser Säule den Winkel n, o, f (Fig. 17) halbirt und folglich die Richtung o, a besitzt, so hat man, um die isometrische Projektion des säulenartigen Körpers zu vollenden, nur durch alle Eckpunkte seiner Grundfläche (also durch $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$) parallele Linien mit o, a zu ziehen und auf diesen die Höhe des säulenförmigen Körpers, d. h. eine der Senkrechten a', a' , b', b' etc. (Fig. 15) aufzutragen. Die Projektionen derjenigen Kanten, welche bei der isometrischen Stellung der Säule von darüberliegenden Flächen bedeckt werden, müssen durch unterbrochene Linien angezeigt werden.

Bemerkung. Die Eintheilung des Rechteckes a, f, o, n in Quadrate (Fig. 16) und die isometrische Darstellung dieser Quadrate in Fig. 17 wird dem Anfänger die Konstruktionsweise der isometrischen Grundfläche des säulenartigen Körpers vollkommen deutlich machen, wenn er allenfalls über die Anwendung des Hauptsatzes 4 nicht ganz im Klaren sein sollte.

Uebungsaufgaben über die Konstruktion der isometrischen Projektionen rechtwinklich begränzter Körper, deren geometrische Projektionen (Grund- und Aufrisse) gegeben sind.

(Taf. 8, Fig. 1—12.)

In diesen, so wie in allen späteren Aufgaben, welche sich auf die Konstruktion der isometrischen Projektion eines durch seinen Grund- und Aufriss gegebenen Körpers beziehen, kömmt es vor Allem darauf an, dass man im Stande ist, die isometrische Projektion des dem Körper entsprechenden Grundrisses zu konstruiren, weil man

alsdann nur noch durch einen jeden Punkt des isometrischen Grundrisses eine parallele Linie mit der isometrischen Höhenaxe zu ziehen und auf diese die Höhe des Punktes, durch dessen Grundriss die parallele Linie gezogen wurde, aufzutragen hat.

Dies ist die einfachste, die allgemeinste und auch die einzige Regel, welche zur isometrischen Darstellung eines Körpers gegeben werden kann, und nur in wenigen speziellen Fällen, die wir später anführen werden, erleidet dieselbe einige kleine Modifikationen, die übrigens als solche nicht einmal angesehen werden können, sondern vielmehr als Erweiterungen der obigen Regel betrachtet werden müssen, welche aus denselben Hauptprinzipien hervorgehen, wie die Regel selbst.

(Fig. 1, 2 und 3.)

Aufgabe. Man soll die isometrische Projektion des in Fig. 1 und 2 im Grund- und Aufriss dargestellten rechtwinklich begränzten Körpers konstruiren.

Auflösung. Man beschreibe mit einer beliebigen Linie d,f (Fig. 2) als Radius aus einem willkürlichen Punkte d (Fig. 3) einen Kreisbogen $2,1,f$, ziehe aus d die Vertikale $d,1$, beschreibe aus 1 mit dem Radius $1,d$ die Kreisbögen 2 und f'' , und ziehe die beiden isometrischen Axen (Längen- und Breitenaxe) $d,2$ und d,f'' ; die dritte isometrische Axe (Höhenaxe) ist die Vertikale $d,1$ selbst. Nun trage man die Linien d,a und d,c (Fig. 2) nach d,a und d,c (Fig. 3), konstruire das Parallelogramm d,a,b,c , trage die Linie a,e (Fig. 2) von a nach e'' (Fig. 3) und ziehe die Verbindungslinie e'',f'' . Die Figur a,d,f'',c,b,e'' ist alsdann die isometrische Projektion des Grundrisses (Fig. 2).

Durch alle Punkte dieses Grundrisses lege man hierauf parallele Linien mit der Höhenaxe und trage auf

eine jede derselben die Höhe der daraufliegenden Punkte auf. Man nehme daher b, b und c, c (Fig. 3) $= b', b'$ (Fig. 1), die kleineren Linien e'', e und f'', f (Fig. 3) $= b', b'$ (Fig. 1), die grösseren Linien e'', e und f'', f (Fig. 3) $= a', a'$ (Fig. 1) ff. Endlich ziehe man die Verbindungslinien $b e, c f, b c, a e, a d, d f$ und $f e$.

Bemerkung. Da man sich einen jeden isometrisch darzustellenden rechtwinklich begränzten Körper mit irgend einem Eckpunkte seiner Grundfläche auf der horizontalen Projektionsebene schief aufgestellt denken kann, in allen Fällen aber die Konstruktionsweise der isometrischen Projektion des Körpers nothwendig dieselbe sein muss, obgleich die isometrische Projektion eine andere wird, so machen wir darauf aufmerksam, und rathen, sich beständig daran zu erinnern, dass *derjenige Eckpunkt der Grundfläche des Körpers, um welchen man sich denselben auf der horizontalen Projektionsebene so weit gedreht denkt, bis er sich in der isometrischen Lage befindet, den Vereinigungspunkt der isometrischen Axen und daher den Mittelpunkt des Kreises bildet, welcher zur Bestimmung der Lage dieser Axen konstruirt werden muss; dieser Punkt bestimmt daher immer zugleich auch die Lage der isometrischen Grundfläche und hiedurch die ganze Gestalt der isometrischen Projektion des Körpers selbst.*

(Taf. 8, Fig. 4, 5 und 6.)

Aufgabe. Aus dem Grundrisse (Fig. 5) und dem Aufrisse (Fig. 4) soll die isometrische Projektion (Fig. 6) konstruirt werden.

Auflösung. Man bestimme 1) die isometrischen Axen $d, 1, d, a$ und $d, 2$.

2) Man konstruiere den isometrischen Grundriss d, a, b, c (Fig. 6) des Rechteckes a, b, c, d (Fig. 5), in der Voraussetzung, dass der Körper um den Punkt d gedreht sei.

3) Man trage die Linie c, g (Fig. 5), welche $= a, e$ ist, von c nach g'' , von b nach 4 und nach 3, und von a nach e'' (Fig. 6) und ziehe die Linien $e'', 3$ und $g'', 4$. Auf diese Weise ergibt sich die isometrische Projektion d, e'', f'', g'' (Fig. 6) des Rechteckes d, e, f, g (Fig. 5).

4) Man ziehe durch alle Punkte der isometrischen Grundfläche mit der isometrischen Höhenaxe $d, 1$ parallele Linien und trage auf diesen die Höhen der entsprechenden Punkte (Fig. 4 und 5) auf. Die kleineren Höhen ($a a, b b, c c, g'' g, f'' f, e'' e$) (Fig. 6) sind daher $= b', b'$ (Fig. 4) und die grösseren Höhen ($e'' e, d d, f'' f, g'' g$) Fig. 6 $= a', e'$ (Fig. 4).

(Taf. 8, Fig. 7, 8 und 9.)

Aufgabe. Man soll die isometrische Projektion des im Grund - und Aufrisse (Fig. 7 und 8) dargestellten rechtwinklich begränzten Körpers konstruiren.

Auflösung. Dieselbe ergibt sich aus denjenigen der beiden vorhergehenden Aufgaben.

(Taf. 8, Fig. 10, 11 u. 12.)

Aufgabe. Der Aufriss (Fig. 10) und der Grundriss (Fig. 11) eines anderen rechtwinklich begränzten Körpers sind gegeben. Man soll die isometrische Projektion desselben (Fig. 12) konstruiren.

Auflösung. Die in Fig. 12 ausgeführte Konstruktionsweise zeigt die oben erwähnte Modifikation der gegebenen Hauptregel, welche darin besteht, dass man die mit der horizontalen Projektionsebene parallellaufende Ebenen des darzustellenden Körpers selbst, z. B. $a'b'$ und

e', f' (Fig. 10), als die Projektionsebenen der zunächst über ihnen befindlichen Theile des Körpers betrachtet.

Es wurde daher in Fig. 12 nach Bestimmung der isometrischen Axen $d, 1$, d, a und d, c nicht die isometrische Projektion des ganzen Grundrisses (Fig. 11), sondern zunächst nur diejenige des Rechteckes a, b, c, d konstruirt, und hieraus die isometrische Projektion der unteren Platte a, a, b, b, c, c, d, d (Fig. 12) bestimmt; die obere Grundfläche der unteren Platte wurde sofort als die Projektionsebene der zweiten Platte betrachtet, in dieser die isometrische Projektion des Rechteckes e, f, g, h (Fig. 11) konstruirt, und hieraus wieder die isometrische Projektion der zweiten Platte dargestellt. Endlich wurde die obere Grundfläche e, f, g, h (Fig. 12) dieser zweiten Platte als die horizontale Projektionsebene der daraufstehenden rechtwinklichen Säule nebst ihrem rechtwinklichen Vorsprunge n', n', o', o' (Fig. 10) betrachtet und in dieser der isometrische Grundriss dieser Säule nebst ihres Vorsprun- ges auf folgende Weise konstruirt.

Die Linie e', i' (Fig. 10) wurde nach $e, 4$ und $f, 4$ (Fig. 12) getragen, durch die Punkte $4, 4$ parallele Linien $4, m$ und $4, l$ mit e, h oder f, g gezogen, und sofort die senkrechten Entfernungen der Punkte n, i und m (Fig. 11) von der Linie e, f auf die Senkrechten $4, m$ und $4, l$ (Fig. 12) von 4 nach 5 , nach k und i , nach l und m getragen. Endlich wurden die Verbindungslinien l, m , k, i und $5, 5$ gezogen, die Linie i, q oder k, p (Fig. 11) nach k, p'' und i, q'' getragen, und durch p'' und q'' mit f, g die parallelen Linien q'', n'' und p'', o'' gezogen. Durch die Punkte $m, l, k, i, p'', q'', o'', n''$ wurden zuletzt mit der isometrischen Höhenaxe $d, 1$ Parallele gezogen, und auf diesen die Höhen der darauf befindlichen Punkte über der horizontalen Ebene e', f' (Fig. 10) aufgetragen.

VIERTES KAPITEL.

KONSTRUKTION DER GEOMETRISCHEN UND ISOMETRISCHEN PROJEKTIONEN SCHIEFWINKLICH BEGRAENZTER KOERPER.

Zweifache Drehung eines unregelmässigen fünfseitigen senkrechten Prisma's. Konstruktion seiner isometrischen Projektion.

(Taf. 9, Fig. 1—7.)

Erste Aufgabe. Man soll den geometrischen Grund- und Aufriss einer unregelmässigen fünfseitigen senkrechten Säule konstruiren.

Auflösung. 1) Man denke sich die Säule in einer beliebigen Stellung auf der horizontalen Projektionsebene und konstruire ihre Grundfläche; diese bildet alsdann den Grundriss der Säule.

2) Aus allen Punkten (a, b, c, d, e) des Grundrisses ziehe man senkrechte Linien auf die Grundlinie, trage auf die beiden äussersten Senkrechten a', a' , c', c' die Höhe der Säule, von der Grundlinie an gerechnet, auf und verbinde endlich die Endpunkte a' und c' durch eine gerade Linie a', c' . Die Figur $a', a', b', d', c', c', d', b', a'$ ist alsdann die vertikale Projektion der Säule.

Erklärung. Nach Hauptsatz 8 müssen die horizontalen Projektionen aller Seitenflächen der Säule gerade Linien sein, und weil die Gränzlinien der beiden Grundflächen

in diesen Seitenflächen liegen, so müssen die horizontalen Projektionen der Grundflächen von den horizontalen Projektionen der Seitenflächen begränzt werden und daher auch umgekehrt die horizontale Projektion einer der beiden Grundflächen, die horizontale Projektion der ganzen Säule sein.

Nun aber liegt die eine der beiden Grundflächen in der horizontalen Projektionsebene, und bildet daher ihre horizontale Projektion selbst, so dass man also, um den geometrischen Grundriss der Säule darzustellen, nur die Grundfläche derselben zu konstruiren hat.

Was die Konstruktion der vertikalen Projektion der Säule betrifft, so erinnern wir, dass die Säule durch ihre Kanten bestimmt ist, und dass alle Kanten auf der horizontalen Projektionsfläche senkrecht stehen, während die beiden Grundflächen mit dieser parallel sind. Die Konstruktion der vertikalen Projektion beruht daher einzig auf dem Hauptsatze 3 Unterfall 2 und auf dem Hauptsatze 10.

Zweite Aufgabe. Das im Grund- und Aufrisse (Fig. 1 und 2) dargestellte fünfseitige senkrechte Prisma, soll um den Punkt c auf der horizontalen Projektionsebene so gedreht werden, dass alle Punkte des Prisma's während der Drehung sich in Ebenen bewegen, welche mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind.

Auflösung. 1) Man ziehe eine Linie $a'c'$ (Fig. 3), welche mit der Grundlinie der beiden Projektionsebenen denjenigen Winkel bildet, unter welchem die Grundfläche der Säule nach der Drehung zur horizontalen Projektionsebene aufgestellt sein soll.

2) Man nehme die Linie a',c' (Fig. 3) so gross als die Linie a',c' (Fig. 1) und konstruire über der ersteren eine Figur a',a',b',d',c',c',d',b' , welche der vertikalen Projektion der Säule (Fig. 1) vollkommen gleich ist.

3) Durch alle Punkte des Grundrisses (Fig. 2) ziehe man Hilfslinien parallel mit der Grundlinie. (Diese Hilfslinien bezeichnen die horizontalen Projektionen der parallelen Ebenen, in welchen sich die Punkte der Säule gedreht haben.)

4) Durch alle Punkte der vertikalen Projektion (Fig. 3) der schief aufgestellten Säule, ziehe man senkrecht auf die Grundlinie, eine andere Reihe von Hilfslinien. Aus der Durchschneidung je einer parallelen und einer senkrechten Hilfslinie, welche durch die Projektionen desselben Punktes der Säule gezogen wurde, ergibt sich sodann die horizontale Projektion dieses Punktes nach der Drehung der Säule. So z. B. bestimmen die Parallele $a a a$ und die beiden Senkrechten $a' a$, $a' a$ (Fig. 3 u. 4) die horizontalen Projektionen a, a (Fig. 4); die Parallele $c c c$ (Fig. 2 und 4) und die Senkrechten $c' c$, $c' c$ bestimmen die horizontalen Projektionen c, c ff. Um die Konstruktion zu vollenden, hat man nur noch die entsprechenden Punkte durch gerade Linien zu verbinden.

Dritte Aufgabe. Man soll das schief aufgestellte Prisma, dessen beide Projektionen in den Figuren 3 und 4 konstruiert sind, zum zweitenmale, aber so drehen, dass sich alle Punkte desselben während der Drehung in Ebenen bewegen, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel sind.

Auflösung. 1) Man ziehe eine Linie $m c c$ (Fig. 6), welche mit der Grundlinie denjenigen Winkel bildet, unter welchem irgend eine, durch eine Kante des Prismas gelegte, auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht stehende Ebene die vertikale Projektionsebene nach der Drehung durchschneidet. Dieser Winkel ist indessen ganz beliebig.

2) Man nehme $c c$ (Fig. 6) gleich $c c$ (Fig. 4) und konstruiere Figur 6, so dass dieselbe Fig. 4 vollkommen

gleich ist; denn es ist klar, dass die Punkte der Säule durch die oben angegebene Drehung weder ihre gegenseitige Lage, noch diejenige zur horizontalen Projektionsebene verändert haben können, da sie von dieser während und nach ihrer Drehung alle gleich weit entfernt bleiben.

3) Durch alle Punkte der vertikalen Projektion (Fig. 3) ziehe man Hilfslinien parallel mit der Grundlinie. (Diese Hilfslinien sind die vertikalen Projektionen der mit der horizontalen Projektionsebene parallelen Ebenen, in welchen sich die Punkte der Säule drehen.)

4) Durch alle Punkte der horizontalen Projektion (Fig. 6) ziehe man senkrechte Hilfslinien auf die Grundlinie.

Aus der Durchschneidung je einer parallelen und einer senkrechten Hilfslinie, welche durch die Projektionen desselben Punktes der Säule gezogen sind, ergibt sich sodann die vertikale Projektion dieses Punktes der Säule nach ihrer zweiten Drehung. Es bestimmen sonach die Linien $b'b'$ (Fig. 3 und 4) und $b b'$ (Fig. 6 und 5) den Punkt b' ; die parallele Linie $a'e'a'$ (Fig. 3 und 5) und die beiden Senkrechten ee' und aa' (Fig. 6 und 5) die Punkte e' und a' ff.

Zusatz. Da für alle Projektionen der Satz gilt, dass die Projektionen paralleler Linien ebenfalls parallel sind, und dass sich dieselben ebenso zu einander verhalten, wie die Linien selbst, so müssen in Fig. 5: 1) die Projektionen aller Seitenkanten, also $a'a'$, $b'b'$, $c'c'$ etc., einander gleich und parallel sein. 2) Die entsprechenden Kanten der Grundflächen müssen ebenfalls einander gleich und parallel sein.

Hat man daher die vertikale Projektion $a'b'...e'$ der unteren Grundfläche und diejenige einer Sei-

tenkante z. B. $c'c'$ konstruiert, so darf man nur durch die übrigen Punkte der Grundfläche mit $c'c'$ parallele Linien ziehen, auf diesen die Kante $c'c'$ auftragen und die entsprechenden Endpunkte der aufeinanderfolgenden Seitenkanten durch gerade Linien verbinden.

Aufgabe. Man soll aus der horizontalen und vertikalen Projektion (Fig. 1 und 2) einer unregelmässigen fünfseitigen und senkrechten Säule, die isometrische Projektion derselben konstruieren.

Auflösung. Wir erinnern vor Allem an die gegebene Hauptregel, dass man die isometrische Projektion eines Punktes im Raume dadurch erhält, dass man durch die isometrische Projektion seiner horizontalen geometrischen Projektion oder seines Grundrisses eine Linie parallel mit der isometrischen Höhenaxe zieht, und auf dieser die Höhe des Punktes über der horizontalen Projektionsebene (welche sich aus dem geometrischen Aufrisse ergibt) aufträgt.

Hieraus geht also hervor, dass nach Konstruktion der isometrischen Projektion des Grundrisses die Aufgabe selbst als gelöst betrachtet werden kann.

Zu diesem Zwecke umgebe man die horizontale Projektion der Säule (Fig. 2) mit einem Rechtecke I, II, III, IV, dessen Seiten eine solche Lage haben, dass wo möglich alle Punkte des Grundrisses mit denselben zusammenfallen, betrachte dieses Rechteck als den Grundriss einer rechtwinklich begränzten Säule, welche mit der fünfseitigen Säule die gleiche Höhe hat, und konstruiere sofort die isometrische Projektion I, II, III, IV (Fig. 7) dieses Rechteckes. Endlich trage man die Linien IV,*a*, IV,*e* und IV,*d* (Fig. 2) nach IV,*a*, IV,*e* und IV,*d* (Fig. 7), und ebenso die Linien III,*e* und II,*b* (Fig. 2) nach III,*e* und II,*b* (Fig. 7), ziehe die Verbindungslinien

ab , bc , cd , de , lege durch alle Punkte des isometrischen Grundrisses parallele Linien mit der Höhenaxe IV,1, trage auf diesen die Höhe der fünfseitigen Säule auf und verbinde die Endpunkte der aufeinanderfolgenden Kanten durch gerade Linien. Die isometrische Projektion des fünfseitigen Prisma's (Fig. 1 und 2) ist alsdann vollendet.

Vierte Aufgabe. Man soll aus der isometrischen Projektion (Fig. 7) einer senkrechten fünfseitigen Säule die wahren Dimensionen aller Kanten dieser Säule bestimmen.

Auflösung. Man erinnere sich, dass alle Linien, welche mit den isometrischen Axen IV,I, IV,III und IV,1 parallel sind, die wahre Grösse der im Raume befindlichen Linien besitzen, und in der Wirklichkeit, wie die isometrischen Axen selbst, senkrecht aufeinanderstehen. Die Seitenkanten aa , bb , cc , dd , ee der isometrischen Projektion bestimmen daher ohne Ausnahme die Höhe des fünfseitigen Prisma's und die wahre Länge seiner Seitenkanten, und ebenso gibt ae , weil sie mit der isometrischen Axe I,IV zusammenfällt, die wahre Länge der Seite ae (Fig. 2) der Grundfläche des Prisma's an; dies ist indessen nicht der Fall mit den Seiten ab , bc , cd und de , weil dieselben mit den isometrischen Axen nicht parallel sind.

Da aber die isometrischen Linien Ia und Ib , IIb und IIc , $IIIc$ und $IIId$ (Fig. 7) in der Wirklichkeit aufeinander senkrecht stehen, so hat man, um die wahre Grösse irgend einer Kante der Grundfläche z. B. die von cd zu bestimmen, ganz einfach zwei senkrechte Linien Sc und Sd (Fig. 7 a) zu konstruiren, die isometrischen Linien $IIId$ und $IIIc$ (Fig. 7) nach Sd und Sc (Fig. 7 a) zu tragen und die Verbindungslinie cd zu ziehen; diese bestimmt alsdann die wahre Länge der isometrisch dargestellten Kante dc (Fig. 7) und muss daher $= dc$ (Fig. 2) sein.

Geometrische und isometrische Projektion einer ganzen und einer schiefabgestumpften sechsseitigen Pyramide. Bestimmung der wahren Grösse isometrisch dargestellter Linien im Raume.

(Taf. 9, Fig. 8—12)

Erste Aufgabe. Man soll den geometrischen Grund- und Aufriss (Fig. 9 und 8) einer sechsseitigen Pyramide konstruiren.

Auflösung. Man denke sich die Pyramide in einer beliebigen und entsprechenden Stellung auf der horizontalen Projektionsebene, konstruire die Grundfläche *abc...ef* (Fig. 9) derselben in einer dieser Stellung entsprechenden Lage, bestimme die horizontale Projektion *s* ihrer Spitze und verbinde diese mit den Eckpunkten der Grundfläche durch gerade Linien. Die Figur *a b c d e f, s* ist alsdann die horizontale Projektion der Pyramide.

Zur Bestimmung der vertikalen Projektion (Fig. 8) ziehe man durch alle Punkte der horizontalen Projektion auf die Grundlinie senkrechte Linien und trage auf diesen von der Grundlinie angefangen ihre Höhen auf; da die Grundfläche der Pyramide in der horizontalen Projektionsebene liegt, so müssen sich die vertikalen Projektionen aller Eckpunkte der Grundfläche in der Grundlinie selbst befinden, und nur die vertikale Projektion *s'* der Spitze der Pyramide muss oberhalb der Grundlinie und zwar in einer solchen Entfernung von derselben liegen, welche der Höhe der Pyramide gleich ist.

Zweite Aufgabe. Eine im Grund- und Aufrisse (Fig. 8 und 9) dargestellte Pyramide wird von einer Ebene 1'4'

(Fig. 8) durchschnitten, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht. Man soll erstens die horizontale Projektion (1,2,3,4,5,6 Fig. 9) dieses Durchschnit-
tes, und zweitens die wahre Gestalt desselben (Fig. 10 a oder Fig. 10 b) bestimmen.

Auflösung. 1) Da die Durchschnittsebene auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht, so muss nach Hauptsatz 7 ihre vertikale Projektion eine gerade Linie 1'4' (Fig. 8) sein, und demnach die vertikalen Projektionen 1',2',3',4' der Punkte, in welchen diese Ebene die Kanten der Pyramiden durchschneidet, auf dieser geraden Linie liegen. Wie nun aber aus den vertikalen Projektionen der auf einer Pyramidalfläche befindlichen Punkte die horizontalen Projektionen 1,2,3,4,5,6 derselben bestimmt werden, wurde bereits früher angegeben.

2) Um die wahre Gestalt des Durchschnit-
tes zu bestimmen, können zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden, je nachdem man von dem Hauptsatze 11 oder von dem Hauptsatze 10 Anwendung zu machen gedenkt. Im ersteren Falle nämlich denkt man sich die Durchschnittsebene 1'4' (Fig. 8) so lange um die auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehende Linie (11, 1') gedacht, bis sie sich in der Lage 1'4'' befindet, — von hier aus mit sich selbst parallel bleibend, bis zu 1,4 (Figur 10 a) fortgerückt, und endlich zum zweitenmale um eine in ihr befindliche Linie (41,4'1' Fig. 8 und 9), welche zugleich auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, so lange gedreht, bis sie mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist; diese Voraussetzungen festgehalten, ist klar, 1) dass die vertikale Projektion 4,1 (Fig. 10 a) der Linie, um welche sich die Ebene zuletzt gedreht hat, auf der Grundlinie senkrecht stehen muss; 2) dass die vertikale Projektion

des Durchschnittees dem Durchschnitte selbst vollkommen gleich und die gegenseitige Lage und Grösse der darin gedachten Hilfslinien durch diese Projektion vollkommen bestimmt werden muss.

Die zur Bestimmung der wahren Gestalt des Durchschnittees auszuführende Konstruktion mit Zugrundlegung des Hauptsatzes 11 ist daher folgende :

1) Man ziehe 1,4 (Fig. 10 a) senkrecht auf die Grundlinie und nehme dieselbe so gross wie 1'4' (Fig. 8).

2) Man trage die Linien 1'2', 1'3' (Fig. 8) nach 1,m und 1,n (Fig. 10 a).

3) Man ziehe durch die Punkte m und n senkrechte Linien auf 1,4.

4) Man trage die Linien m 2, m 6, n 3 und n 5 (Fig. 9) nach m 2, m 6, n 3 und n 5 (Fig. 10 a).

5) Man ziehe die Verbindungslinien 1,6, 1,2, 6,5, 5,4 etc.

Die Figur 1,2...5,6,1 bestimmt alsdann die wahre Gestalt des Durchschnittees.

Wollte man zur Bestimmung der wahren Gestalt des Durchschnittees den Hauptsatz 10 zu Grunde legen, so wäre das die Konstruktion erläuternde Raisonement dem oben angeführten fast ganz gleich. Der Anfänger mag sich darin versuchen. Die Konstruktionsweise selbst wird durch die gezogenen Hilfslinien (Fig. 8, 9 und 10 b) hinreichend verdeutlicht. Die Gestalt des auf diesem Wege bestimmten Durchschnittees zeigt Fig. 10 b, welche der Fig. 10 a, wenn die Konstruktion genau ausgeführt ist, vollkommen gleich sein muss.

Dritte Aufgabe. Man soll die isometrische Projektion der im Grund- und Aufrisse (Fig. 8 und 9) dargestellten Pyramide und ihres schiefen Durchschnittees bestimmen.

Auflösung. 1) Man umgebe die horizontale Projektion derselben (Fig. 9) mit einem entsprechenden Rechtecke I, II, III, IV.

2) Man ziehe von den im Innern des Rechteckes liegenden Punkten 1,2,3,4,5,6 und s auf die Seite des Rechteckes senkrechte Hilfslinien.

3) Man konstruiere (Fig. 11) die isometrische Projektion I,II,III,IV des Rechteckes.

4) Man konstruiere (Fig. 11) die isometrischen Projektionen a,d , $m'm'$, $n'n'$ der Hilfslinien, auf welchen sich die horizontalen Projektionen 1,2,3,4,5,6,s (Fig. 9) befinden.

5) Man trage auf alle isometrischen Linien (S. Seite 85) die wahren Längen der durch sie bezeichneten Linien auf, und nehme also:

I a und II d (Fig. 11) = I a und II d (Fig. 9);

I b , II c , III e und IV f (Fig. 11) = I b , II c , III e und IV f (Fig. 9);

$a1$ (Fig. 11) = $a1$ (Fig. 9);

$d4$ (Fig. 11) = $d4$ (Fig. 9);

$m,2$ und $m,6$ (Fig. 11) = $m,2$ und $m,6$ (Fig. 9);

$n,3$ und $n,5$ (Fig. 11) = $n,3$ und $n,5$ (Fig. 9);

as (Fig. 11) = as (Fig. 9).

6) Man verbinde die aufeinanderfolgenden Eckpunkte $a,b,c,d...$ durch gerade Linien.

7) Man ziehe durch die Punkte 1,2,3,4,5,6 und s parallele Linien mit der isometrischen Höhenaxe IV,1.

8) Man nehme sS (Fig. 11) = der Höhe des Punktes s' (Fig. 8),

2,2 und 6,6 (Fig. 11) = der Höhe von $2'$ (Fig. 8),

3,3 und 5,5 (Fig. 11) = der Höhe von $3'$ (Fig. 8),

1,1 (Fig. 11) = der Höhe von $1'$ (Fig. 8), und

4,4 (Fig. 11) = der Höhe von $4'$ (Fig. 8).

9) Man ziehe die Verbindungslinien Sa , Sb ... Sf und die Verbindungslinien 2,3, 3,4, 4,5, 5,6, 6,1. Ist die Konstruktion richtig ausgeführt, so müssen die ersteren genau durch die Punkte 1,2,3...6 gehen; auch müssen die Linien 2,6 und 3,5 mit einander parallel sein, weil auch die Linien 2,6 und 3,5 (Fig. 9) mit einander parallel sind.

Vierte Aufgabe. Man soll die wahre Grösse einer isometrisch dargestellten Linie im Raume bestimmen.

Auflösung. Die gegebene isometrisch dargestellte Linie im Raume sei AB (Fig. 12) und ihre beiden, ebenfalls isometrisch dargestellten Projektionen seien aB und $a'b'$.

Da die Linie AB mit ihrer horizontalen Projektion Ba und der Projektionslinie Aa ein rechtwinkliches Dreieck bildet, weil letztere Linie auf der horizontalen Projektionsebene und folglich auch auf aB senkrecht steht, so muss sich die wahre Grösse der Linie AB dadurch ergeben, dass man ein rechtwinkliches Dreieck aBA (Fig. 12a) konstruiert, dessen eine Kathete die Projektionslinie Aa und dessen andere Kathete die horizontale Projektion aB der gegebenen Linie selbst ist.

Die isometrisch dargestellte Projektionslinie Aa (Fig. 12) ist parallel mit der isometrischen Höhenaxe, besitzt daher ihre wahre Länge und kann unmittelbar (Fig. 12a) aufgetragen werden. Nicht so die horizontale Projektion aB (Fig. 12), weil sie mit keiner der isometrischen Axen parallel ist. Zieht man aber parallel mit diesen die Linien Bd und ad , so entsteht ein isometrisch rechtwinkliches Dreieck dAB , dessen Katheten da und dB ihre wahren Längen besitzen, und dessen Hypothenuse die gesuchte Linie aB ist; diese Linie muss sich daher dadurch ergeben, dass man (Fig. 12a) zwei senkrechte Linien da und dB zieht, auf diesen die isometrischen Linien da und

dB (Fig. 12) aufrägt, und die Endpunkte a und B durch die gerade Linie aB verbindet.

Der übrige Theil der Konstruktion, um die wahre Grösse von AB zu bestimmen, ist bereits angeführt.

Sollte die Länge der Linie AC (Fig. 12) bestimmt werden, so hätte man durch die Endpunkte a und c ihrer isometrischen horizontalen Projektion, parallel mit den isometrischen Axen, die Linien af und cf zu ziehen, und mit diesen als Katheten ein rechtwinkliches Dreieck cfa (Fig. 12 b) zu konstruiren; die Hypothenuse ac dieses Dreiecks bestimmt alsdann die wahre Länge der isometrischen horizontalen Projektion ac ; zieht man sofort durch C parallel mit der horizontalen Projektion (Fig. 12) die Hilfslinie Ca'' , so muss diese $= ca$ sein, und es entsteht ein isometrisch rechtwinkliches Dreieck $a''CA$, gebildet von der gegebenen Linie CA als Hypothenuse, von der horizontalen Projektion ($Ca'' = ca$) dieser Linie, als der ersten Kathete und dem Höhenunterschiede Aa'' des Punktes A und des Punktes C , als der zweiten Kathete. Von diesen beiden Katheten ist die wahre Länge der Kathete $Ca'' = ca$ in Fig. 12 b bereits bestimmt, während die zweite Kathete als parallel mit der isometrischen Höhenaxe, ihre wahre Länge besitzt. Errichtet man daher (Fig. 12 b) senkrecht auf ac die Linie $aA = a''A$, so bestimmt die Verbindungslinie cA (Fig. 12 b) die wahre Länge der isometrisch dargestellten Linie CA (Fig. 12).

Beispiele zur Uebung.

1) Man soll die wahre Grösse des Kantenstückes $S4$ der isometrisch dargestellten Pyramide (Figur 11) bestimmen.

Auflösung. Man ziehe durch 4 parallel mit der isometrischen horizontalen Projektion $s4$ des gegebenen

Kantenstückes die Linie $4r$; hierdurch entsteht ein isometrisch rechtwinkliches Dreieck $4rS$, dessen Katheten $4r$ und rS mit den isometrischen Axen IV,III und IV,I parallel sind und demnach ihre wahren Längen besitzen. Man konstruiere daher (Fig. 11 a) zwei senkrechte Linien $aS = rS$ (Fig. 11) und $a4 = r4$ (Fig. 11) und ziehe die Verbindungslinie $4S$; diese Linie als die Hypothenuse dieses rechtwinklichen Dreiecks bestimmt die wahre Länge des Kantenstückes $S4$ (Fig. 11).

2) Man soll die wahre Länge der Seite 3,4 des isometrisch dargestellten Pyramidenschnittes 1,2....6 (Fig. 11) bestimmen.

Auflösung. a) Bestimmung der wahren Grösse der isometrischen horizontalen Projektion 3,4 in der Ebene I,II III,IV.

Man ziehe (Fig. 11 a) zwei senkrechte Linien, nehme ar'' (Fig. 11 a) $= 3n$ (Fig. 11) und $a3$ (Fig. 11 a) $= n,4$ (Fig. 11) und ziehe die Verbindungslinie $3r''$; diese gibt die wahre Grösse der Linie 3,4 in der Ebene I,II,III,IV an.

b) Bestimmung der wahren Grösse der Seite 3,4 selbst.

Man ziehe durch 3 parallel mit 3,4 die Linie $3r''$, errichte (Fig. 11 a) senkrecht auf $3r''$ die Linie $r''4 = r''4$ (Fig. 11) und ziehe die Verbindungslinie 3,4 (Fig. 11 a); diese bestimmt alsdann die wahre Grösse der Linie 3,4 (Fig. 11) und muss demnach $= 3,4$ (Fig. 10 a) oder $= 3,4$ (Fig. 10 b) sein.

Bemerkung. Anstatt $3,r''$ (Fig. 11) mit 3,4 parallel zu ziehen, trägt man zweckmässiger die Höhe 3,3 des Punktes 3 auf die Höhe 4,4 des Punktes 4, so dass $4r'' = 4,4-3,3$ ist, und zieht die Verbindungslinie $3r''$.

3) Man soll die wahre Länge des Kantenstückes $S2$ bestimmen.

□ *Auflösung.* 1) Man konstruirt (Fig. 11 a) die Senkrechten $a2 = ms$ (Fig. 11) und $ar' = m2$ (Fig. 11).

2) Man ziehe die Verbindungslinie $2r'$ (Fig. 11 a). Diese bestimmt die wahre Länge der isometrischen horizontalen Projektion $2s$ des gegebenen Kantenstückes $S2$ (Fig. 11).

3) Man trage (Fig. 11) die Höhenlinie $2,2$ von s nach r' und ziehe $2r'$.

4) Man errichte senkrecht auf $r'2$ (Fig. 11 a) die Linie $r'S$ und nehme diese $= r'S$ (Fig. 11).

5) Man ziehe (Fig. 11 a) die Verbindungslinie $4S$; diese bestimmt die wahre Länge des isometrisch dargestellten Kantenstückes $S2$ (Fig. 11).

Bemerkung. Es ist nicht nöthig, dass man von jeder isometrisch dargestellten Linie im Raume zugleich ihre isometrische horizontale Projektion dargestellt habe; denn sobald die Höhen ihrer Endpunkte und die Lage der isometrischen Höhenaxe bekannt ist, kann auch die isometrische horizontale Projektion der Linie im Raume konstruirt werden; die Konstruktion eines isometrischen Grundrisses ist daher nur als Hilfsmittel zur Konstruktion der isometrischen Projektion des Körpers selbst zu betrachten, und nach Vollendung dieser Konstruktion ganz zu beseitigen, indem sich die Höhenunterschiede der Punkte in den meisten und wichtigsten Fällen schon aus ihrer gegenseitigen Lage ergeben und daher nur noch von denjenigen, *wenigen*, Punkten die Grundrisse beizubehalten sind, deren Höhenunterschiede sich nicht auf diese Weise bestimmen lassen.

FÜNFTES KAPITEL.

REGELMAESSIGE KOERPER. AUFLÖSUNG EINES BESONDERN FALLES IN DER ISOMETRISCHEN PROJEKTIONSLEHRE.

(Taf. 10.)

Wenn ein Körper nur von *gleichen und regelmässigen Flächen* begränzt wird, so nennt man denselben einen *regelmässigen Körper*. Zur Konstruktion des geometrischen Auf- und Grundrisses eines solchen Körpers hat man sich vor Allem mit den Eigenschaften desselben bekannt zu machen, weil von diesen die Darstellung des Grundrisses, Aufrisses oder der vertikalen Hauptdurchschnitte *einzig und allein abhängt*.

(Taf. 10, Fig. 6—8.)

Aufgabe. Man soll einen von 12 regelmässigen und gleichen Fünfecken begränzten Körper (*Pentagondodekaeder*) im Aufrisse, Grundrisse und isometrisch darstellen.

Auflösung. Die Haupteigenschaften eines solchen Körpers sind folgende:

1) Je zwei und zwei gegenüberliegende Flächen sind mit einander parallel und haben eine entgegengesetzte Lage.

2) Wenn man irgend eine Fläche, z. B. $abcde$ (Fig. 7) als die oberste betrachtet, so sind die Diagonalen, welche die mittleren Eckpunkte 1, 3, 5, 7, 9 der fünf absteigenden Flächen verbinden parallel mit den Seiten des obern Fünfecks $abcde$ (also z. B. die Diagonale 1, 9 parallel mit ae); und ebenso sind die Diagonalen, welche die mittleren

Eckpunkte der von der untersten Fläche aufsteigenden Fünfecke, also die Punkte 2,4,6,8,10 verbinden, parallel mit den Seiten des untersten Fünfeckes (also die Diagonale 10,2 parallel mit fk).

3) Der Mittelpunkt des obersten Fünfecks und der Mittelpunkt des untersten Fünfecks befinden sich auf einer Linie, welche auf beiden Fünfecken zugleich senkrecht steht.

4) Wenn man durch die Mitte des Körpers eine Ebene legt, welche durch die Eckpunkte a und h (Fig. 7) zweier gegenüberliegenden Fünfecke geht, so erhält man einen Durchschnitt $f'1'a'c'6'h'$ (Fig. 7), welcher der Reihe nach aus folgenden Linien besteht.

- a) aus der Axe $f'h'$ des untersten Fünfecks;
- b) aus der Axe $f'1'$ eines aufsteigenden Fünfecks;
- c) aus der Seite ($a1, a'1'$) eines von oben absteigenden Fünfecks;
- d) aus der Axe ($a'c'$) des obersten Fünfecks;
- e) aus der Axe ($c'6'$) eines absteigenden Fünfecks;
- f) aus der Seite ($6'h', 6h$) eines aufsteigenden Fünfecks.

Aus diesen Eigenschaften geht folgende Konstruktion des Grundrisses hervor:

1) Man konstruirt ein regelmässiges Fünfeck $abcde$ (Fig. 7) dessen Seiten einer Kante des regelmässigen Körpers gleich sind.

2) Man konstruirt in denselben Kreis ein zweites regelmässiges Fünfeck $fghik$, welches die entgegengesetzte Lage hat.

3) Man konstruirt ein drittes regelmässiges Fünfeck 1,3,5,7,9 dessen Seiten parallel mit den Seiten des ersten Fünfeckes $abcde$ sind und die Länge einer Diagonale dieses Fünfeckes z. B. von be besitzen. Hiedurch werden die mittleren Eckpunkte 1,3,5... der 5 absteigenden Fünfecke bestimmt, welche zugleich die höchsten Eckpunkte der fünf aufsteigenden Fünfecke bilden.

4) Man konstruiere in denselben Kreis ein gleich grosses regelmässiges Fünfeck 2,4,6,8,10 dessen Seiten mit denjenigen des unteren Fünfeckes $fghik$ parallel sind. Durch dieses werden die mittleren Eckpunkte 2,4,6... der 5 aufsteigenden und die tiefsten Eckpunkte der 5 absteigenden Fünfecke bestimmt.

5) Man ziehe die entsprechenden Verbindungslinien. Die auszuführenden Konstruktionen sind in Fig. 7 ohne Ausnahme angezeigt.

Zur Bestimmung des geometrischen Aufrisses hat man zuerst den schon oben erwähnten vertikalen Axendurchschnitt zu konstruieren, welcher durch die Eckpunkte zweier gegenüber liegender Fünfecke geht.

Zu diesem Zwecke ziehe man 1) senkrecht auf die Grundlinie die Hüllslinien aa' , cdc' , hh' , fkf' , 1,1' und 6,6'.

2) Man beschreibe aus f' mit der *Diagonale* (be) des obersten oder irgend eines anderen Fünfeckes einen Kreisbogen, welcher die Hüllslinien 1,1' in 1' (Fig. 6) durchschneidet.

3) Man beschreibe aus 1' und h' mit der *Seite* eines Fünfeckes Kreisbögen, welche die Hüllslinien aa' und 6,6' in a' und 6' durchschneiden.

4) Man beschreibe aus 6' mit der *Diagonale* eines Fünfeckes einen Kreisbogen, welcher die Hüllslinie cdc' in c' durchschneidet.

5) Man verbinde die aufeinander folgenden Durchschnittpunkte $f', 1', a', c', 6'$ und h' durch gerade Linien.

Aus diesem vertikalen Axenschnitte wird die vertikale Projektion selbst auf folgende Weise hergeleitet:

1) Man ziehe durch die Punkte 1' und 6' parallele Linien mit der Grundlinie.

2) Durch die Punkte b und e (Fig. 7) ziehe man senkrecht auf die Grundlinie die Hüllslinie beb' . Dadurch

werden die vertikalen Projektionen b' und e' der Punkte b und e bestimmt.

3) Durch die Punkte 3 und 9, sowie durch 5 und 7 ziehe man senkrecht auf die Grundlinie die Hülfslinien $3,3'$ und $5,5'$, welche auf der durch $1'$ gezogenen Parallelen die vertikalen Projektionen $3'$ und $9'$, sowie $5'$ und $7'$ bestimmen.

4) Auf gleiche Weise ergeben sich durch die Hülfslinien $2,2'$ und $4,4'$ die vertikalen Projektionen der Punkte 2 und 10, sowie der Punkte 4 und 8.

5) Endlich ziehe man die Hülfslinie $g g'$ und verbinde die entsprechenden Punkte durch gerade Linien.

Alle diese Konstruktionen beruhen auf dem Umstande, dass sowohl die Endpunkte der fünf vom obersten Fünfecke absteigenden Kanten, als auch die Endpunkte der fünf vom untersten Fünfecke aufsteigenden Kanten von der horizontalen Projektionsebene gleichweit entfernt sind.

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgehen, dass wir dem Körper auf der horizontalen Projektionsebene eine für die Ausführung der Konstruktion möglichst vortheilhafte Stellung gegeben haben, und zwar eine solche, dass der vertikale Axenschnitt zu der vertikalen Entwurfsebene eine parallele Lage besitzt. Bei dieser Stellung des Körpers stehen aber die beiden Fünfecke $2 f k 10$ und $c d 5 6 7$ (Fig. 7) auf der vertikalen Entwurfsebene senkrecht, während zugleich je zwei und zwei der übrigen ab- und aufsteigenden Fünfecke dieselbe vertikale Projektionen erhalten.

Die Konstruktion der isometrischen Projektion des regelmässigen Körpers ergibt sich aus Betrachtung der Fig. 8, in welcher zum besseren Verständnisse die isometrische Darstellung des Grundrisses schraffirt wurde.

In den Figuren $8a$, $8b$ und $8c$ wurden die wahren Grössen der in Fig. 8 isometrisch dargestellten Linien bc ,

3, b und $h e$ nach der früher angegebenen Methode bestimmt.

Taf. 10. Fig. 1 — 5.

Aufgabe. Man soll einen von acht regelmässigen und gleichen Dreiecken begränzten Körper (Octaeder) im Aufrisse, Grundrisse und isometrisch darstellen.

Auflösung. Man stelle den Körper auf der horizontalen Projektionsebene so auf, dass die Axe welche durch zwei gegenüber liegende Eckpunkte geht, auf der ersteren Ebene senkrecht steht. Zur vertikalen Projektionsebene hingegen gebe man dem Körper eine solche Lage, dass möglichst viele Kanten auf dieser senkrecht stehen oder mit ihr parallel sind.

Bei einer solchen Aufstellung des Oktaeders ist die horizontale Projektion $a b c d$ (Fig. 2) desselben ein Quadrat, dessen 2 Seiten $a b$ und $d c$ mit der Grundlinie parallel sind, während die beiden anderen senkrecht darauf stehen.

Zur Konstruktion der vertikalen Projektion (Fig. 1) bestimmt man zuerst den Durchschnitt des Oktaeders mit einer Ebene welche durch die Axe f geht, und mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist; dieser Durchschnitt ist, wie sich aus der Beschaffenheit des Körpers ergibt, ein Rhombus $g' a' f' b'$ (Fig. 1) dessen 4 Seiten gleich der Höhe $n m$ (Fig. 2) eines der acht gleichseitigen Dreiecke $a m b$ des Oktaeders sind, und dessen Punkte a' und b' sich dadurch ergeben, dass man die Linien $a d$ und $b c$ über die Grundlinien verlängert und aus g' mit der Linie $m n$ zwei Bögen beschreibt, welche die Hülfslinien $d a'$ und $c b'$ in den Punkten a' und b' durchschneiden. Wie sodann mittelst dieser der Punkt f' bestimmt wird, ergibt sich daraus, dass $a' f'$ und $b' f' = a' g'$ oder $= b' g'$ sein müssen.

Die isometrische Projektion des Oktaeders ist in Fig. 3 dargestellt; dieselbe wurde nach der früher angegebenen Methode dadurch bestimmt, dass aus allen Punkten des isometrischen Grundrisses 1,2,3,4 Linien parallel mit der Höhenaxe gezogen und auf diesen die Höhen der Punkte a, b, c, d und f wie gewöhnlich aufgetragen wurden.

Einer aufmerksamen Betrachtung wird nicht entgehen, dass sich die isometrische Projektion (Fig. 3) des Oktaeders nicht so günstig darstellt wie in den vorhergehenden Beispielen, indem nicht weniger als 4 Kanten bf , fd , dg und bg in *eine* und dieselbe gerade Linie fallen; dies hat seinen Grund darin, dass alle diese Kanten in *einer* Ebene liegen, welche, sowie sich das Oktaeder in der isometrischen Lage befindet, auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht und daher zur Projektion eine gerade Linie besitzt. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, darf man den Grundriss des Oktaeders (Fig. 2) nur mit einer neuen rechtwinklichen Figur $A B C D$ oder $A' B' C' D'$ umschliessen, und diese als den Grundriss eines rechtwinklichen Körpers von der Höhe des Oktaeders betrachten, den man sich sofort durch Drehung in die isometrische Lage versetzt denkt.

Aus dem isometrischen Grundrisse $A B C D$ (Fig. 4) oder $A' B' C' D'$ (Fig. 5) dieses Körpers*) ergibt sich auf die früher gezeigte Weise der Grundriss $a b c d M$ des Oktaeders. Zieht man endlich durch M parallel mit der Höhenaxe eine Hülfslinie $f g$, trägt die halbe Höhe des Oktaeders von M nach f und f' und verbindet man sofort die erhaltenen Eckpunkte durch entsprechende Linien, so ergibt sich eine isometrische Darstellung (Fig. 4 und 5) des Oktaeders

*) Der Grundriss wurde in diesem Falle zur Abwechslung in einer Ebene konstruirt, welche durch die Mitte des Körpers geht und die 4 Oktaederkanten $a b$, $b c$, $c d$ und $d a$ enthält.

welche sich von der in Fig. 3 dadurch unterscheidet, dass keine einzige der zwölf Kanten mit einer anderen zusammenfällt.

Die Konstruktion zur Bestimmung der wahren Grösse der vorkommenden Linien ist ganz dieselbe, wie wir sie früher angegeben haben, und beruht auf dem Hauptsatze der isometrischen Projektionslehre: » dass alle Linien » welche mit den isometrischen Axen parallel sind, die » wahren Längen der dargestellten Linien selbst besitzen.« Die wahre Länge von ab (Fig. 4) ergibt sich daher aus der Konstruktion des rechtwinklichen Dreieckes aAb (Fig. 4a) in welchem die Seiten Aa und Ab (Fig. 4a) = Aa (Fig. 4) sind.

Zur Bestimmung der wahren Grösse von fc (Fig. 4) wurden parallel mit den isometrischen Axen AD und CD die Linien Mp und cp gezogen, vermittelt dieser in Fig. 4a die wahre Grösse von Mc bestimmt, und über der letzteren mit der Höhe Mf (Fig. 4) das rechtwinkliche Dreieck Md (Fig. 4a) konstruirt, dessen Hypothenuse cf die wahre Länge der Kante cf (Fig. 4) selbst bestimmt.

Wir haben aus den eben vorgekommenen Konstruktionen der drei verschiedenen isometrischen Projektionen des Oktaeders ersehen, dass von jedem Körper eine unendliche Anzahl von isometrischen Projektionen möglich ist, welche sich mit der Lage des den Grundriss des Körpers einschliessenden Rechteckes stetig verändern. Weil man nun im Stande ist, den durch einen Grund- und Aufriss gegebenen Körper von jeder beliebigen Seite darzustellen, so ist es zweckmässig mit der Konstruktion einer isometrischen Projektion immer nur erst dann zu beginnen, wenn man durch Versuche die Richtung bestimmt hat, nach welcher der Körper betrachtet werden muss, um eine möglichst deutliche und vollkommene Anschauung

von demselben zu erhalten. Es ist indessen zu bemerken, dass in den meisten Fällen unter allen rechtwinklichen Begränzungen des Grundrisses, diejenige, deren Seiten mit der Grundlinie parallel sind und senkrecht darauf stehen, wegen der Einfachheit und Leichtigkeit der daraus hervorgehenden Konstruktion der isometrischen Projektion den Vorzug vor allen übrigen verdient, und dass man seine Zuflucht zu einer anderen Lage des begränzenden Rechteckes nur dann nehmen soll, wenn eine oder mehrere Hauptflächen des darzustellenden Körpers (wie bei dem Oktaeder) in gerade Linien zusammenfallen.

Noch ist zu bemerken, dass, wenn das begränzende Rechteck eine solche Lage besitzt, dass die Halbirungslinien zweier gegenüberliegenden rechten Winkeln auf der Grundlinie senkrecht stehen, die isometrische Projektion eine Frontansicht des Körpers wird; während sich eine Profil- oder Seitenansicht des Körpers dann ergibt, wenn die Halbirungslinien zweier gegenüber liegenden rechten Winkel mit der Grundlinie parallel sind.

SECHSTES KAPITEL.

ISOMETRISCHE PROJEKTION EINES KREISES UND KRUMMER LINIEN UEBERHAUPT.

(Taf. 11.).

Um die isometrische Projektion eines Kreises bestimmen zu können, muss man vor Allem wissen, dass jede *Projektion eines Kreises* entweder selbst wieder ein Kreis, oder (was in der isometrischen Projektionslehre am häufigsten stattfindet) eine *Ellipse* ist; den Beweis dieses Satzes liefert

die analytische Geometrie. Obgleich wir nun die Konstruktion einer Ellipse schon oben gezeigt haben, so müssen wir dennoch, da diese bei isometrischen Konstruktionen nicht entspricht, andere und zwar solche Mittel zu erhalten suchen, welche es möglich machen *die isometrische Projektion eines Kreises aus derjenigen eines den Kreis einschliessenden Quadrates* (welches in allen Fällen am leichtesten darzustellen ist) *möglichst schnell und genau herzu-leiten*. Diese Mittel sind in den verschiedenen Auflösungen der folgenden Aufgabe niedergelegt:

Aufgabe. (Taf. 11. Fig. 1—4.) Man soll die isometrische Projektion eines Kreises bestimmen, wenn sich derselbe in der horizontalen Projektionsebene befindet.

Erste Auflösung. (Mittelst 16 Punkten). 1) Man umgebe den Kreis mit einem Quadrate $abcd$ (Fig. 1) und halbire die Seiten desselben in den Punkten 1, 2, 3 und 4.

2) Man ziehe die Diagonalen bd und ac , welche den Kreis in den Punkten 5, 6, 7 und 8 durchschneiden.

3) Man beschreibe mit dem Radius $3m$ einen Kreisbogen $m,11$, und trage den Bogen 6, 11 von 6 nach 12, von 5 nach 9 und 10, von 8 nach 16 und 15 und von 7 nach 13 und 14.

4) Man ziehe durch je zwei gegenüberliegende Punkte die in der Figur angezeigten Verbindungslinien gg , ff , ee etc.

5) Nun konstruire man die isometrische Projektion $abcd$ (Fig. 4) des Quadrates $abcd$ (Fig. 1) und halbire die Seiten desselben in den Punkten 1, 2, 3 und 4.

6) Man bestimme sofort die Punkte 5, 6, 7 u. 8, indem man die Linie cf oder df (Fig. 1) von c gegen d und b , von d gegen c und a , von a gegen d und b , und endlich von b gegen a und c trägt, und die erhaltenen gegenüberliegenden Punkte f,f durch gerade Linien verbindet.

7) Endlich werden die noch übrigen acht Punkte dadurch erhalten, dass man die Linien cc' und cg' oder de' und dg' (Fig. 1) von den Eckpunkten c, d, a und b (Fig. 4) jedesmal auf beiden Seiten des Rhombus aufträgt und durch die gegenüberliegenden entsprechenden Punkte gerade Linien zieht, welche mit den isometrischen Axen cd und cb parallel sein müssen.

8) Man verbinde die erhaltenen Punkte 1, 2, 3, 4, ... 15, 16 durch eine stetige krumme Linie, welche die Gestalt einer Ellipse besitzt; diese ist sodann die isometrische Projektion des gegebenen Kreises.

Zweite Auflösung. Die eben gezeigte Konstruktion setzt voraus, dass man in dem gegebenen Kreise (Fig. 1) eine gewisse Anzahl von Hülfslinien ziehe, deren Konstruktion nicht nur zeitraubend ist, sondern auch den Grundriss, in welchem sich der Kreis und vielleicht noch mehrere andere Kreise befinden, sehr undeutlich machen würde. Es entsteht daher die Frage, ob diese Hülfskonstruktionen nicht durch solche ersetzt werden können, welche *einmal* konstruirt, für alle möglichen Kreise angewendet werden können, so dass, wenn die isometrische Projektion $abcd$ (Fig. 4) irgend eines, einen Kreis einschließenden Quadrates gegeben ist, die Punkte 6, 7, 8, 9 . . . 15, 16 der den Kreis darstellenden Ellipse ohne weitere Vorkonstruktionen hineingezeichnet werden können.

Diese neuen Hilfsmittel ergeben sich aus einer näheren Betrachtung (S. die folgenden Bemerkungen) der eigenthümlichen Lage der Punkte 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . 16 (Fig. 1), welche zu folgenden Resultaten führt.

1) Die Linie $df = 5f, = 6f = cf$ besitzt eine Länge, welche sehr nahe $= \frac{3}{10}$ des Halbmessers $1m$ des gegebenen Kreises ist.

2) Die Linien, welche die Punkte 10 und 15, 9 und 12, 16 und 13, 14 und 11 verbinden, gehen zugleich durch die Mittelpunkte der Seiten 1 *a* und 1 *d*, 2 *d* und 2 *c*, 3 *c* und 3 *b*, 4 *a* und 4 *b*.

3) Der Bogen 3, 12 ist die Hälfte des Bogens 3, 11 und folglich $= 30^\circ$.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich sofort die Konstruktion zweier Maasstäbe, welche sehr leicht auszuführen sind, und bereits mit Vortheil benützt werden können.

Konstruktion eines Maasstabes zur Bestimmung der 4 Punkte 5, 6, 7 und 8, in welchen der Kreis von den Diagonalen des Quadrates durchschnitten wird (Fig. 2).

Man ziehe eine unbestimmte Linie *s*, 10, trage auf diese eine beliebige Oeffnung 10mal auf, beschreibe aus *s* mit *s*, 10 einen Kreisbogen 10, *t* sowie aus 10 mit der Oeffnung 10, 7 (welche drei solcher Theile enthält, wie die ganze Linie 10) einen Kreisbogen 7 *t* und verbinde endlich den Durchschnittspunkt *t* beider Kreisbögen mit *s*.

Will man nun mittelst dieses Maasstabes die Punkte 5, 6, 7 und 8 der Ellipse (Fig. 4) bestimmen, so beschreibe man aus *s* mit der Linie 1 *m* oder 2 *d* einen Kreisbogen *pr* trage die Oeffnung *pr* dieses Kreisbogens von einem jeden der Eckpunkte *a*, *b*, *c* und *d* (Fig. 4) auf beiden Seiten des Rhombus auf und verbinde die gegenüberliegenden Punkte durch gerade Linien, diese durchschneiden sich in den Punkten 5, 6, 7 und 8.

Konstruktion eines Maasstabes zur Bestimmung der 8 Punkte 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 und 17 (Fig. 3).

Da ein jeder dieser Punkte aus der Durchschneidung zweier Linien bestimmt wird, von welchen die eine, indem

sie durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden halben Rhombusseiten geht, immer eine leicht zu bestimmende Lage besitzt, so ist leicht einzusehen, dass die Konstruktion des zweiten Maasstabes nur zur Bestimmung der anderen Linien nöthig ist. Man beschreibe zu dem Ende mit einer beliebigen Oeffnung $m r'$ (Fig. 3.) einen Kreisbogen $r'o$, und aus r' mit derselben Oeffnung einen Kreisbogen mo . Nun theile man den Kreisbogen $r'o$ in zwei gleiche Theile, fälle aus dem Punkte q , in welchem der Bogen $r'o$ von H deralbirungslinie durchschnitten wird, eine Senkrechte qr' , beschreibe mit der Linie $r'm$, aus r' einen Kreisbogen m' und verbinde die Punkte m und m' durch eine gerade Linie; der Maasstab ist alsdann vollendet.

Um nun mittelst dieses die Punkte 9, 10 . . . 11, 16 zu bestimmen, verfare man auf folgende Weise:

1) Man verbinde die Mittelpunkte der gegenüberliegenden halben Rhombusseiten durch gerade Linien.

2) Man beschreibe aus m (Fig. 3), mit dem Radius $m1$ des darzustellenden Kreises (Fig. 1), welcher $= m1$ (Fig. 4) ist, einen Kreisbogen 1,1 und trage die Oeffnung desselben von den Mittelpunkten 1, 2, 3 und 4 der Rhombusseiten (Fig. 4) rechts und links auf.

3) Endlich verbinde man die gegenüberliegenden Punkte durch gerade Linien. Aus der Durchschneidung dieser und der in (1) gezogenen Linien ergeben sich sofort die verlangten Punkte 9, 10 . . . 15, 16 selbst.

Dritte Auflösung. Obgleich es einer gewandten Hand nicht schwer fällt durch 16 gegebene Punkte, welche auf einer Ellipse liegen, die Ellipse selbst zu ziehen, so wird es doch immer sehr schwierig sein, die Gestalt einer solchen Ellipse, die einen etwas beträchtlichen Umfang hat, in einem Zuge vollkommen auszuführen, weil die Krümmung der Kurve in jedem ihrer Punkte eine andere ist,

und einzelne entfernte Punkte zur Bestimmung der Hauptkrümmungen noch keineswegs genügen.

Aus diesem Grunde denkt man sich um den isometrisch darzustellenden Kreis (Fig. 9) irgend ein regelmäßiges Vieleck, am zweckmässigsten ein Achteck beschrieben, und konstruirt sofort in die isometrische Projektion dieses Achteckes diejenige des Kreises ein. Aus der Ansicht der Figur ergibt sich, dass die Mittelpunkte der 8 Seiten, die nämlich 8 Punkte sind, welche wir schon in den beiden vorhergehenden Auflösungen bestimmt haben, und es ergibt sich zugleich dass die auf den Diagonalen befindlichen Punkte 2, 4, 6 und 8 aus der Durchschneidung der Diagonalen mit den Seiten des Achtecks hervorgehen.

Hat man ein solches Achteck um den isometrisch darzustellenden Kreis konstruirt, so ergibt sich die isometrische Darstellung des Achteckes aus dem bereits Gesagten ohne alle weitere Bemerkungen. Denn es ist:

in Fig. 9		in Fig. 10
A b	=	A b
A a	=	A a
B c	=	B c
B d	=	B d
etc.		etc.

Befinden sich aber in dem Grundrisse zwei oder mehrere Kreise von verschiedenem Durchmesser, so würde es mühsam sein, wenn ein jeder derselben mit einem besonderen Achtecke umgeben werden müsste, und man bedient sich daher in solchen Fällen am zweckmässigsten folgender Methode.

Konstruktion eines Maassstabes zur Darstellung der isometrischen Projektionen regelmässiger Achtecke (Fig. 12).

Man konstruirt zwei senkrechte Linie mn und no , beschreibe aus n mit beliebiger Oeffnung nm einen Kreisbogen und ziehe die Linie mo . Aus m mit der Seite mn ziehe man sofort einen zweiten Kreisbogen, theile diesen in zwei gleiche Theile, ziehe die Halbirungslinie mq und beschreibe endlich aus n entweder mit nq oder mit oq einen Kreisbogen, welcher den eben beschriebenen entweder in q' oder in r durchschneidet. Zieht man hierauf die Linie mq' oder mr , so erhält man im ersten Falle den Winkelmasstab $q'mn$ und im zweiten Falle den Winkelmasstab rmn . Der erste dient zur Bestimmung der Punkte a, b, c, d, e, f, g und h (Fig. 10) insofern diese aus den Mittelpunkten 1, 3, 5, 7 aufgetragen werden, während diese bei der Benützung des zweiten Masstabes aus den 4 Eckpunkten A, B, C, D, bestimmt werden müssen.

Konstruktion einer Ellipse (Fig. 10) mittelst des Winkelmasstabes rmn (Fig. 12).

Es sei in das Rhombus A B C D welches die isometrische Projektion eines Quadrates vorstelle, die isometrische Projektion des in dem Quadrate eingeschriebenen Kreises zu konstruiren.

Man beschreibe mit der Hälfte $m1$ einer Rhombuseite (Fig. 10) aus m (Fig. 12) einen Kreisbogen 1,1, nehme die Oeffnung desselben in den Zirkel und trage diese von allen Eckpunkten A, B, C, D des Rhombus (Fig. 10) auf die Seiten desselben auf, also von A nach a und b , von B nach c und d etc. Verbindet man die erhaltenen Punkte durch entsprechende Linien, so ergeben sich die Seiten ab, cd, ef und gk welche mit den Linien bc, de, fg

und $a k$ das isometrisch dargestellte regelmässige Achteck bilden.

In dieses zeichne man nun eine Ellipse so ein, dass diese die 8 auf einander folgenden Seiten in ihren Mittelpunkten genau berührt.

Um die Figur möglichst genau zu erhalten, kann man mittelst des Maasstabes (Fig. 3) auf die früher gezeigte Weise noch diejenigen acht Punkte bestimmen, welche den Punkten 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 und 16 (Fig. 1) entsprechen.

Isometrische Darstellung eines Kreises, wenn sich derselbe im Raume befindet.

Nicht immer, ja nur in den wenigsten Fällen ist die isometrische Projektion des den Kreis umgebenden Quadrates ein Rhombus, sondern meistens ein Parallelogramm. Dies findet besonders dann statt, wenn sich der darzustellende Kreis im Raume befindet, wie durch die Figuren 5—8 näher erklärt wird.

$A B C D$ (Fig. 6) ist nämlich die horizontale Projektion eines einen Kreis einschliessenden Quadrates, das sich in der horizontalen Projektionsebene befindet; $A b c d$ ist die horizontale Projektion desselben Quadrates, nachdem sich dasselbe so weit gedreht hat, dass es mit der horizontalen Projektionsebene den Winkel A' (Fig. 5) bildet. $A b c d$ ist die horizontale Projektion desselben Quadrates nach einer zweiten Drehung, wobei jedoch die Entfernungen aller Punkte von der horizontalen Projektionsebene dieselben blieben, so dass also die Projektion (Fig. 8) der Projektion $A b c d$ (Fig. 6) vollkommen gleich ist.

Das Parallelogramm $A b c d$ (Fig. 7) endlich ist die vertikale Projektion dieses Quadrates nach seiner zweiten Drehung.

Aufgabe. Es sei nun das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 11) gegeben, welches die isometrische Projektion eines im Raume befindlichen Quadrates darstelle. Man soll in dieses die isometrische Projektion des in dem Quadrate eingeschriebenen Kreises konstruieren.

Zur Vermeidung späterer Wiederholungen wollen wir die Auflösung dieser Aufgabe möglichst deutlich auseinandersetzen.

Auflösung. 1) Man theile die Seiten des Parallelogrammes in zwei gleiche Theile. Hiedurch ergeben sich die Punkte a,a und b,b .

2) Man nehme die Hälfte Aa oder mb einer grösseren Seite AD des Parallelogrammes in den Zirkel, beschreibe mit dieser Oeffnung aus dem Scheitelpunkte m des Maasstabes Fig. 12 einen Kreisbogen bb , und trage die Senne dieses Kreisbogens von den Eckpunkten A,B,C und D nach $A1, B1, C1$ und $D1$.

3) Man beschreibe mit der Hälfte $Ab = ma$ einer kleineren Seite AB des Parallelogrammes aus dem Scheitelpunkte m des Maasstabes (Fig. 12) einen Kreisbogen aa und trage die Senne dieses Kreisbogens von den Eckpunkten A, B, C und D nach $A2, B2, C2$ und $D2$.

4) Man ziehe die 4 Verbindungslinien 1,2. Diese bilden eben so viele Seiten eines isometrischen regelmässigen Achteckes, und die Punkte in welchen dieselben von den Diagonalen AC und BD des Parallelogrammes durchschnitten werden, sind die Berührungspunkte dieses Achteckes und der eingeschriebenen Ellipse. Ist das gegebene Parallelogramm klein, so sind 8 Punkte und 8 Tangenten hinreichend um die Ellipse aus freier Hand ziehen zu können. Hat aber das Parallelogramm einen etwas grossen Umfang, so müssen noch 8 weitere Punkte bestimmt werden.

5) Zu diesem Zwecke theile man die Hälfte einer jeden Seite des Parallelogramms in zwei gleiche Theile und verbinde die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch die Linien ss und tt .

6) Man beschreibe mit der Hälfte Aa einer grösseren Seite des Parallelogrammes aus dem Scheitelpunkte m des Maasstabes Fig. 3 einen Kreisbogen aa , trage die Senne desselben von den Mittelpunkten a,a (Fig. 11) nach r,r u. s. w., und ziehe die Verbindungslinien rr aus deren Durchschneidung mit den Linien ss , 4 Punkte f entstehen.

7) Ebenso beschreibe man mit der Hälfte Ab einer kleineren Seite des Parallelogrammes aus dem Scheitelpunkte m des Maasstabes (Fig. 3) einen Kreisbogen bb , trage die Senne desselben von den Mittelpunkten b und b (Fig. 11) nach u,u u. s. w. und ziehe die Verbindungslinien uu,uu .

Aus der Durchschneidung dieser Linien mit den Linien tt ergeben sich 4 andere Punkte f , welche nebst den früher bestimmten zur richtigen Vorzeichnung der Ellipse aus freier Hand vollkommen ausreichen.

Erster Zusatz. Obgleich die Konstruktion der Maassstäbe Figur 3 und Figur 12 ziemlich leicht und schnell auszuführen ist, so kann diese dennoch mit Hülfe eines Transporteurs noch schneller geschehen. Zur Konstruktion des Maasstabes Fig. 3, welcher 8 Punkte bestimmt, von welchen je 2 und 2 auf dem ursprünglichen Kreise um einen Bogen von 60° entfernt sind, hat man nämlich mittelst des Transporteurs an eine beliebig gezogene gerade Linie einen Winkel von $51\frac{1}{3}$ Graden aufzutragen, während der Winkel des anderen Maassstabes rmn (Fig. 12) $32\frac{2}{3}$ Grade enthält. Denn es ist für den Maasstab (Fig. 3) die Senne $r'm'$ gleich dem Cosinus von 30° wenn die Linie $mr' = 1$

gesetzt wird und man hat demnach die Gleichung $2 \sin \frac{(m'm r')}{2} = \cos. 30^\circ$, folglich $\sin \frac{1}{2} (m'm r') = \frac{\cos. 30^\circ}{2}$,

woraus sich der Winkel $m'm r' = 51^\circ 20'$, oder $51\frac{1}{3}^\circ$ ergibt.

Im Maassstabe (Fig. 12) hingegen ist die Linie $n r = 1 - \tan. \frac{45^\circ}{2}$, wenn man die Linie $m n$ oder $n o =$

1 setzt. Hieraus ergibt sich aber: $2 \sin \frac{1}{2} (r m n) =$

$1 - \tan. \frac{45^\circ}{2}$ und folglich $\sin \frac{r m n}{2} = \frac{1 - \tan. 22^\circ 30'}{2}$,

woraus der Winkel $r m n = 32^\circ 39'$ oder nahezu $= 32\frac{2}{3}^\circ$ hervorgeht.

Zweiter Zusatz. Ist man im Besitze eines tausendtheiligen Maassstabes, so beschreibe man mit einer Linie = 10 einen Kreisbogen und nehme die Senne $r'm'$ für den Maassstab (Fig. 3) = 8,66, die Senne $n r$ für den Maassstab (Fig. 12) hingegen = 5,86. Denn es ist $\cos. 30^\circ = 0,86603$ und $1 - \tan. \frac{45^\circ}{2} = 1 - 0,41421 = 0,58579$, folglich für einen Radius = 10, $\cos. 30^\circ = 8,66$ und $10 - \tan. \frac{45^\circ}{2} = 5,86$.

Isometrische Darstellung von Ellipsen.

Da eine jede Ellipse als die Projektion eines Kreises betrachtet werden kann, so hat man sich zur isometrischen Darstellung von Ellipsen auch ganz desselben Verfahrens wie bei den Kreisen zu bedienen. Man beschreibt nämlich um die gegebene Ellipse ein Rechteck oder ein Parallelogramm, dessen Seiten eine solche Lage zur Ellipse haben, dass die vier Berührungspunkte zugleich

die Mittelpunkte derselben sind, und aus diesem Grunde die Verbindungslinie zweier gegenüberliegender Berührungspunkte zu denjenigen Seiten des Parallelogrammes, auf welchen die beiden anderen Berührungspunkte liegen, eine parallele Lage besitzen. Von diesem Parallelogramm wird sofort die isometrische Projektion konstruirt, und in solche die entsprechende Ellipse, welche die isometrische Projektion der gegebenen Ellipse bildet, auf die oben gezeigte Weise eingeschrieben.

Isometrische Darstellung krummer Linien überhaupt.

(Fig. 13 und Fig. 14.)

Zur isometrischen Darstellung irgend einer krummen Linie (Fig. 13) umgibt man dieselbe mit einem Rechtecke $abcd$, zieht mit den Seiten desselben eine beliebige Anzahl von Parallelen, welche die krumme Linie in den Hauptpunkten durchschneiden, konstruirt sodann (Fig. 14) die isometrische Projektion des Rechteckes, sowie aller eingezeichneten Hülfslinien und zeichnet mittelst dieser die isometrische Projektion der krummen Linie in das isometrische Rechteck selbst ein.

Eintheilung einer gegebenen Ellipse in eine beliebige Anzahl gleicher Theile.

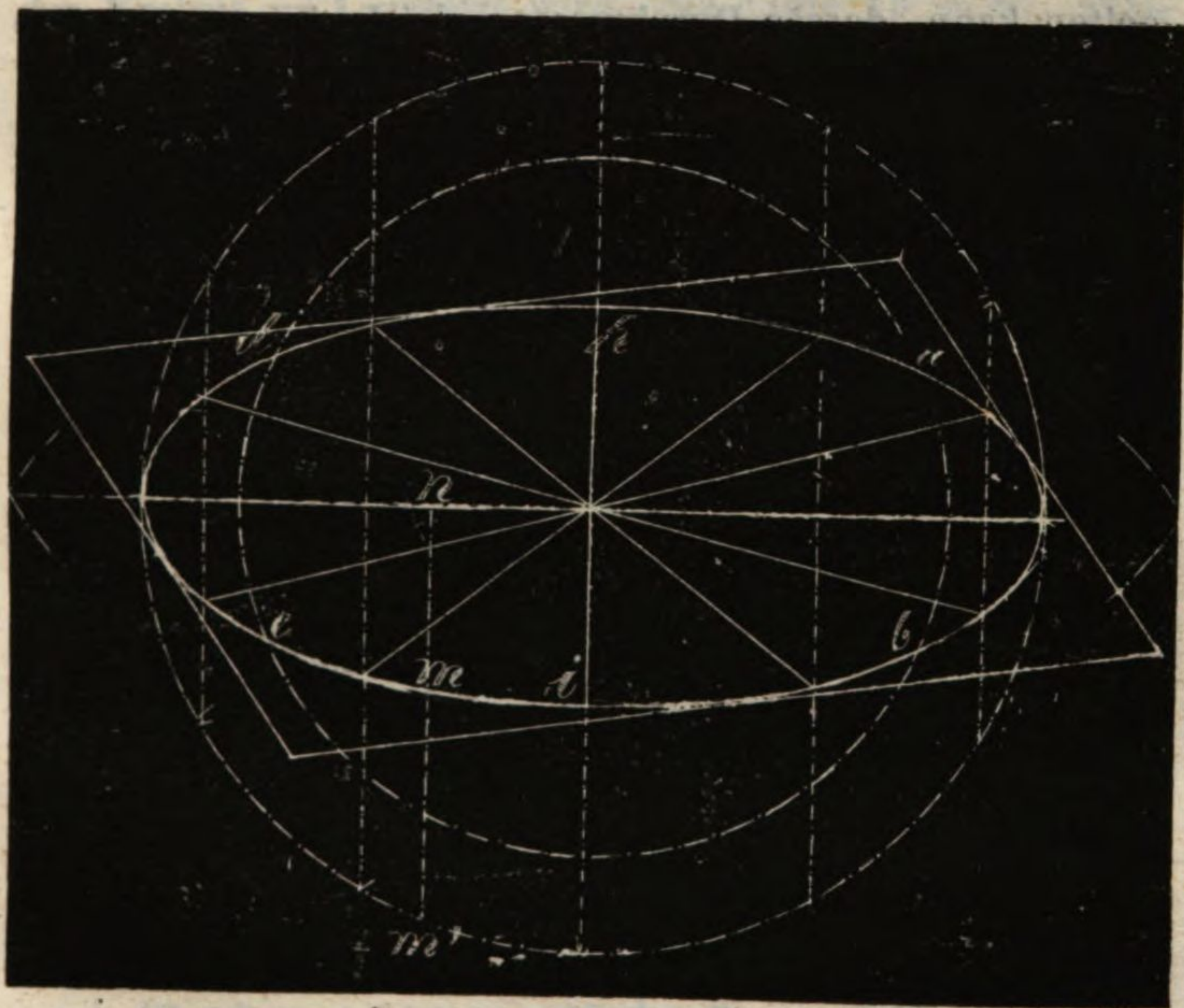
Schr häufig, besonders bei der isometrischen Darstellung gezahnter Räder, müssen Ellipsen in eine bestimmte Anzahl von gleichen Theilen getheilt werden; so nämlich, dass die elliptischen Bögen (welche nicht unter sich gleich sind) den gleichen *Kreisbögen* desjenigen eingetheilten Kreises entsprechen, dessen isometrische Projektion die gegebene Ellipse darstellt.

Nach der allgemeinen Methode wird eine solche Eintheilung dadurch ausgeführt, dass man den der Ellipse

entsprechenden Kreis mit einem Quadrate umgibt, alle Theilungspunkte des Kreises durch parallele Linien auf die Seiten dieses Quadrates bezieht, und mittelst dieser die isometrischen Projektionen der Theilungspunkte selbst bestimmt.

In vielen Fällen bedient man sich jedoch noch zweckmässiger der folgenden Konstruktion. (Siehe nachstehende Figur.)

Man beschreibt aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit beliebiger Oeffnung einen Kreisbogen, welcher die Ellipse in 4 Punkten a, b, c und d durchschneidet, und theile die



Bögen ab und cd in zwei gleiche Theile. Die Halbirungslinie derselben ist alsdann die grosse Axe der Ellipse *).

Ueber dieser beschreibe man sofort einen halben oder auch einen ganzen Kreis, theile denselben in diejenige Anzahl von gleichen Theilen, in welche man die Ellipse selbst eingetheilt, zu erhalten wünscht, und fälle von allen Theilungspunkten des Kreises auf die grosse Axe der Ellipse senkrechte Linien. Die Punkte, in welchen diese Senkrechten die Ellipse durchschneiden, sind alsdann die verlangten Theilungspunkte.

Diese Konstruktion ergibt sich aus der Betrachtung, dass eine jede Ellipse als die Projektion eines Kreises gelten kann, dessen Durchmesser gleich der grossen Axe der Ellipse ist.

Da die Ellipse von mehreren Senkrechten unter ziemlich spitzen Winkeln durchschnitten wird, und in einem solchen Falle die entsprechenden Theilungspunkte z. B. 1 und 2 nicht scharf genug bestimmt werden, so muss man zuweilen, um genaue Resultate zu erhalten, über der kleinen Axe hi der Ellipse einen zweiten Kreis beschreiben, diesen in dieselbe Anzahl gleicher Theile theilen, und von denjenigen Theilungspunkten, welche man auf der Ellipse genauer bestimmen möchte auf die kleine Axe senkrechte Linien ziehen, welche alsdann die von den entsprechenden Theilungspunkten des grossen Kreises ausgehenden Senkrechten unter rechten Winkeln in den zu bestimmenden Punkten scharf durchschneiden.

Sollte die Theilung der Ellipse bei einem gegebenen Punkte m beginnen, so hätte man von diesem eine Senk-

*) Es versteht sich wohl von selbst, dass, im Falle diese bereits bekannt sein sollte, die eben angegebene Konstruktion nicht mehr nöthig ist.

rechte $m n$ auf die grosse Axe der Ellipse zu fällen und dieselbe so weit zu verlängern, bis sie den Kreis in einem Punkte m' durchschneidet. Von hier aus theilt man sofort den Kreis in die gewünschte Anzahl gleicher Theile und fällt von den Theilungspunkten senkrechte Linien auf die grosse Axe. Die Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit der Ellipse bilden auf dieser die verlangten Theilungspunkte.

Einige Bemerkungen zur theoretischen Begründung der vorhergehenden Konstruktionen.

1) Aus Fig. 1 (Taf. 11) ergibt sich, wenn der Radius des Kreises $= 1$ gesetzt wird, die Linie $f 5 = 1 - \sqrt{1/2} = 1 - 1/2 \sqrt{2} = 1 - 0,707 = 0,292$ oder nahezu 0,3.

2) Wenn man die ganze oder die halbe Seite eines Quadrates $a b c d$ (Fig. 1) durch einen Punkt f in zwei Theile theilt, welche in irgend einem geometrischen Verhältnisse zu einander stehen, so wird auch in jeder Projektion dieses Quadrates, die Projektion derselben ganzen oder halben Seite, durch die Projektion des obigen Theilungspunktes in zwei Theile getheilt, welche in demselben geometrischen Verhältnisse zu einander stehen, wie die Theile der ganzen oder der halben Quadratseite selbst.

Auf dieser und der vorhergehenden Bemerkung beruht die Konstruktion und die Anwendung des Maassstabes Fig. 2, so wie die Anwendung der Maassstäbe Fig. 3 und Fig. 12.

3) Wenn man mit dem Radius $3 m$ (Fig. 1) einen Kreisbogen $m, 11$ beschreibt und den Bogen $6, 11$ von 6 nach 12 trägt, so ist sowohl der Bogen $2, 11$ als der Bogen $3, 12$ ein Kreisbogen von 30° . Will man daher irgend eine Linie $m r'$ (Fig. 3) in zwei Theile theilen, welche sich eben so zu einander verhalten, wie die Linien $m r$

und $r,3$, so darf man nur mit dieser Linie einen Kreisbogen $r'o$ von 60° beschreiben, denselben halbiren und aus der Mitte q auf die gegebene Linie eine Senkrechte $q r$ ziehen.

4) Wenn man in Fig. 9 die Hilfslinie $m d$ zieht, so theilt diese den Winkel $6 m 5$, der $= 45^\circ$ ist, in zwei gleiche Theile. Will man daher irgend eine Linie $m n$ (Fig. 12) in zwei Theile theilen, welche sich ebenso zu einander verhalten, wie die Linien $B d$ und $d 5$ (Fig. 9), so darf man nur in dem Endpunkte derselben eine Senkrechte $n o$ errichten, dieser die Länge von $n m$ geben und den Winkel $o m n$ ($= 45^\circ$) durch eine Linie $m q$ in zwei gleiche Theile theilen.



SIEBENTES KAPITEL.

ZYLINDERFLÄCHEN.

(Tafel 12.)

Ueber die Entstehung der Zylinderflächen wurde das Nöthige bereits früher (Seite 56) gesagt. Auch haben wir bei jener Gelegenheit angeführt, dass man die ihrem Wesen nach unbegranzte Zylinderfläche meistens durch zwei Ebenen begränzt, welche entweder parallel sind, oder irgend eine andere beliebige Lage zu einander besitzen. Diese Ebenen sind nun in allen Fällen, wo die krumme Linie, an welcher die Erzeugende hingleitete, ein Kreis oder eine Ellipse war, wieder entweder ebenfalls ein Kreis, oder eine Ellipse.

Bei der isometrischen Darstellung irgend eines kreisförmigen oder elliptischen Zylinders kommt es daher einzig darauf

an, dass man die beiden Grundflächen des Zylinders mit Rechtecken oder Parallelogrammen umgibt, welche die Ellipse in den Mittelpunkten ihrer vier Seiten berühren, von diesen Rechtecken oder Parallelogrammen ihre isometrischen Projektionen konstruirt, und endlich in diese die isometrischen Projektionen der Kreise oder Ellipsen, welche wieder Kreise (freilich sehr selten) oder Ellipsen sein können, auf die im vorhergehenden Kapitel beschriebene Weise einzeichnet.

Zum Verständnisse der auf Tafel 12 ausgeführten Konstruktionen werden daher einige kurze Erklärungen vollkommen genügen, wofern man sich mit den Auflösungen des vorhergehenden Kapitels recht vertraut gemacht hat.

(Fig. 1—4.)

Fig. 1 und 2 zeigen den geometrischen Auf- und Grundriss eines Würfels, über dessen Flächen vier senkrechte Kreiszyylinder (A,A'), (B,B'), (C,C'), (D,D') aufgestellt sind, deren Grundflächen eine solche Lage haben, dass ihre Mittelpunkte mit denjenigen der Würfelflächen zusammenfallen. Der Zylinder (D,D') ist hohl und in der Mitte nach vertikaler Richtung von einer Ebene durchschnitten, so dass nur noch die eine Hälfte übrig ist.

Fig. 3 ist der Winkelmaassstab zur Konstruktion isometrischer regelmässiger Achtecke. Derselbe wurde zur Konstruktion aller auf dieser Tafel vorkommenden Ellipsen benützt. (Siehe Seite 125.)

Fig. 4 ist die isometrische Projektion des Würfels und der vier über seinen Flächen aufgestellten Zylinder. Die Konstruktion derselben ergibt sich aus dem oben Gesagten. Ueber die Darstellung der kleineren Grundfläche des Zylinders D bemerken wir, dass sich die Hauptpunkte 1', 8' derselben aus der grösseren Grundfläche dadurch ergeben, dass man die entsprechenden Hauptpunkte 1, 8 etc. der letzteren mit dem Mittelpunkte der Würfelfläche

durch Linien verbindet; aus der Durchschneidung dieser Hilfslinien mit den Seiten des kleinen Quadrates, welches die innere Grundfläche einschliesst, erhält man alsdann die Punkte $1', 8'$ etc.

Die oberen Grundflächen der Zylinder können entweder auf gleiche Weise wie die unteren bestimmt werden; oder (was schneller von statten geht) dadurch, dass man durch eine beliebige Anzahl von Punkten der unteren Grundflächen Hilfslinien zieht, welche mit den Axen der Zylinderflächen parallel sind, und die Längen derselben aufträgt. Dieser Methode kann man sich jedoch nur in dem Falle bedienen, wo wie in Fig. 4 die Axen der Zylinderflächen mit den isometrischen Axen selbst parallel sind.

Bemerkung. Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgehen, dass die grossen Axen, z. B. oo der Ellipsen, welche die Grundflächen der Zylinderflächen bilden, mit den grossen Diagonalen und die kleinen Axen der Ellipsen, z. B. pp mit den kleinen Diagonalen der Würfelflächen zusammenfallen, während die mit den isometrischen Axen aa , ab , ad parallelen Durchmesser der Ellipsen die Durchmesser der Kreise bestimmen, deren isometrische Projektionen sie sind. Eine solche Lage der Zylinderflächen ist die im Maschinenzeichnen weitaus am häufigsten vorkommende, und es ist daher sehr zweckmässig, sich die Lage der elliptischen Grundflächen für diesen besonderen Fall besonders zu merken.

(Fig. 5 — Fig. 7.)

Fig. 5 und 6 zeigen den Auf- und Grundriss eines auf der horizontalen Projektionsebene liegenden Kreiszylinders A, A , welcher auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht, und einen zweiten Kreiszylinder B, B' trägt,

welcher mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist; dieser durchdringt ein rechtwinkliches, auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht stehendes Parallelopipedon, dessen 2 Seitenflächen de und gf mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind, während die beiden anderen senkrecht darauf stehen.

Fig. 7 zeigt die isometrische Projektion der in den Figuren 5 und 6 dargestellten Kombination der beiden Zylinder und des Parallelopipedons.

Die Anzahl der darzustellenden Ellipsen oder elliptischen Bögen ist sechs, nämlich:

1) Zwei ganze Ellipsen, welche die Grundflächen des Zylinders (AA') bilden und von den Rhomben $pp'q'q'$, und $srs'r'$ eingeschlossen werden.

2) Die Ellipse, welche die obere Grundfläche des Zylinders B bildet und von dem Parallelogramme $em'n'o'$ (Fig. 7) eingeschlossen wird. Dieses Parallelogramm wurde vermittelt der isometrischen Grundfläche $lmno$ (Fig. 7) des Rechteckes $lmno$ (Fig. 6) dargestellt.

3) Diejenige Ellipse, welche aus der Durchschneidung des Zylinders B' und der vorderen Wand $e'e'$ des Parallelopipedons (Fig. 5) entsteht und von dem Parallelogramme $bcb'c'$ (Fig. 7) eingeschlossen wird. Die geometrische Breite dieses Parallelogrammes ist bc (Fig. 6) und die Höhe $b'e'$ (Fig. 5),

4) Die beiden elliptischen Bögen, deren Aufrisse in $a'd'$ und $d'i'$ liegen.

Zur Bestimmung des ersteren horizontal liegenden Bogens wurde die Ellipse konstruirt, welche sich in dem Parallelogramm $abcd$ (Fig. 7) befindet. Der zweite vertikal liegende Bogen, welcher von dem isometrischen Rechtecke $kk'ii'$ eingeschlossen ist, ergab sich aus der in dem Parallelogramme $bcc'b'$ befindlichen Ellipse auf folgende Weise:

Die Punkte c' und k' wurden durch eine gerade Linie $c'k'$ verbunden und durch die Hauptpunkte der von dem Parallelogramme $b'c'bc$ eingeschlossenen Ellipse Linien gezogen, welche der Linie $c'k'$ gleich und parallel sind.

ACHTES KAPITEL.

KEGELFLÄCHEN.

(Taf. 13.).

Ueber die Entstehung und die vorzüglichsten Eigenschaften der Kegelflächen haben wir uns schon Seite 54 ff. ausgesprochen. Wir gehen daher unmittelbar zur Erklärung der auf Tafel 13 ausgeführten Konstruktionen über.

Fig. 1 und 2. Geometrischer Auf- und Grundriss eines senkrechten Kegels mit kreisförmiger Grundfläche.

Die Linie $c'd'$ ist die vertikale Projektion einer die Kegelfläche durchschneidenden Ebene, welche mit der Grundfläche parallel ist. Die horizontale Projektion $c2nd$ dieses Durchschnittes ist daher ein Kreis.

Sowohl die Grundfläche als der horizontale Durchschnitt wurde mit einem Quadrate umgeben, so zwar dass je zwei Seiten eines jeden Quadrates auf der Grundlinie senkrecht, während die beiden andern mit derselben parallel sind.

Fig. 3 u. Fig. 4 sind die beiden Projektionen des Kegels, nachdem sich dieser um den Punkt (b, b') seiner Grundfläche so gedreht hat, dass er zu der horizontalen Projektionsebene eine schiefe Lage besitzt, während alle seine Punkte von der vertikalen Projektionsebene noch gerade

so weit entfernt sind, als vorher. Die vertikale Projektion Fig. 5 ist daher derjenigen in Fig. 1 vollkommen gleich. Wie aber die horizontale Projektion der Grundfläche und des horizontalen Schnittes bestimmt werden kann, geht aus dem Früheren, so wie aus der bloßen Betrachtung der Figur hervor. So z. B. ergibt sich der Punkt 1 der Grundfläche (Fig. 4) dadurch, dass man durch 1 (Fig. 2) parallel mit der Grundlinie die Gerade 1,1 zieht, und durch 1' (Fig. 5) senkrecht auf die Grundlinie die Linie 1'1; diese beiden Hülfslinien 1,1 und 1'1 durchschneiden sich alsdann in 1.

Die beiden Ellipsen (Fig. 4), welche die horizontalen Projektionen der Grundfläche und des horizontalen Durchschnitkes bestimmen, wurden übrigens nicht auf die ebenangeführte Weise, sondern mittelst der sie umschliessenden Rechtecke $rstu$ und $vw xz$ und mit Hülfe des Maassstabes (Fig. 7) konstruirt.

Fig. 5 und 6 sind die Projektionen desselben Kegels nach einer solchen Drehung um den Punkt b , dass er nun auch zur vertikalen Projektionsebene eine schiefe Lage besitzt; die Entfernungen aller Punkte von der horizontalen Projektionsebene sind unverändert geblieben, weil die Drehung so geschah, dass alle Punkte des Kegels sich in Ebenen bewegten, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel sind. Die vertikalen Projektionen dieser Ebene sind die Hülfslinien aa'' (Fig. 3 und 6) 1,1'', $m'm''$ etc., durch welche alle Punkte der vertikalen Projektion des Kegels (Fig. 6) nach seiner zweiten Drehung mittelst seiner horizontalen Projektion (Fig. 5) bestimmt werden können.

Aus dem Anblicke der Fig. 6 ergibt sich übrigens, dass wir nur die Parallelogramme $t''s''r''u''$ und $x''v''w''z''$, so wie die Spitze S des Kegels unmittelbar bestimmt haben,

während die beiden Ellipsen $b''m''a''m''$ und $d''n''c''n''$ mittelst des Maassstabes Fig. 7 in die erwähnten Parallelogramme auf die oben gezeigte Weise eingeschrieben worden sind. Hat man die Ellipsen konstruirt, so sind zur Vollendung der vertikalen Projektion nur noch die Linien Sa'' und Sb'' zu ziehen. (Siehe Seite 34.)

Fig. 9 zeigt die isometrische Projektion des in Fig. 1 und 2 dargestellten Kegels. Um dieselbe zu erhalten, wurden die isometrischen Projektionen $rstu$ und $vwxyz$ (Fig. 9) der Quadrate $rstu$ und $vwxyz$ (Fig. 2) bestimmt und in diesen die Ellipsen $1m1b1m1a$, $2n2d2n2c$ mit Hilfe des Maassstabes (Fig. 7) eingeschrieben. Der übrige Theil der Konstruktion ist nach dem Vorhergehenden für sich klar.

Fig. 10, Fig. 11 und Fig. 12 zeigen die Konstruktion der Gestalt des Durchschnittes (Fig. 12) und seiner horizontalen Projektion Fig. 11, wenn der Kegel von einer Ebene $a'b'$ (Fig. 10) geschnitten wird, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht.

Um die horizontale Projektion eines auf dem Durchschnitte liegenden Punktes zu bestimmen, von welchem die vertikale Projektion c' gegeben ist, ziehe man durch diese, parallel mit der Grundlinie, die Hilfslinie $c'd'$, fälle von d' eine Senkrechte auf die Grundlinie bis zu Sm , beschreibe mit Sd einen Kreis, und ziehe endlich durch c' eine Senkrechte $c'c$ auf die Grundlinie, welche den so eben gezogenen Kreis in 2 Punkten c, c durchschneidet. Auf diese Weise können die horizontalen Projektionen aller übrigen Punkte des Durchschnittes bestimmt, und diese sofort durch eine stetige Linie verbunden werden. Da diese Linie eine Ellipse ist, so kann dieselbe auch dadurch erhalten werden, dass man das Rechteck $psqr$ konstruirt, und in dieses die Ellipse selbst mittelst des Maassstabes (Fig. 7) einzeichnet.

Um die wahre Gestalt des Durchschnit­tes $b'a'$ (Fig. 10) zu bestimmen, wurde derselbe um die Horizontale (qr, b') Fig. 10 und 11 so weit gedreht, bis die Ebene, worin er lag, mit der horizontalen Projektionsebene parallel war, also die vertikale Projektion des Durchschnit­tes nach $a''b'$ fiel. Alsdann wurde (Fig. 12) parallel mit der Grundlinie eine beliebige Hilfslinie ab gezogen, und auf diese die Punkte $a'', 1'', 2''$ etc. (Fig. 10) mittelst der Linien $a''a, 1''1, 2''2$ (Fig. 10 und 12) projicirt. Endlich wurden die Entfernungen der Punkte 1, 2, c , 3, 4 (Fig. 11) von der Axe ab in Fig. 12 aufgetragen und die Endpunkte der Senkrechten 1,1, 2,2, c,c etc. durch eine stetige krumme Linie verbunden.

Fig. 14 zeigt die isometrische Projektion des in Fig. 10 schief durchschnittenen Kegels. Das Parallelogramm $p'q'r's'$, welches die den Durchschnitt des Kegels bildende Ellipse $bcac$ einschliesst, wurde mittelst seines isometrischen Grundrisses pqr bestimmt, indem durch die Eckpunkte desselben vertikale Linien gezogen und auf diesen die Höhe der Punkte a' und b' (Fig. 10) aufgetragen wurden; es ist daher pp' und $ss' =$ der Entfernung des Punktes a' (Fig. 10) und qq' sowie $rr' =$ der Entfernung des Punktes b' von der Grundlinie $m'n'$.

Fig. 13 zeigt die Entwicklung der Kegel­fläche (Fig. 10 und 11), welche nach der Linie ($Sn, S'n'$) aufgeschnitten und in einer Ebene ausgebreitet wurde; die krumme Linie $b43 c21a$ etc. (Fig. 13) ist die Entwicklung des elliptischen Durchschnit­tes $a'b'$ (Fig. 10) oder $acbc$ (Fig. 14).

Die Konstruktion, welche bei der Entwicklung von Kegel­flächen und der darauf befindlichen Linien in allen Fällen befolgt werden muss, ist diese:

Man theile den Umfang der Grundfläche des Kegels (Fig. 11) in eine solche Anzahl gleicher Theile, dass für

die Theilbögen ohne merkbaren Fehler ihre Sennen genommen werden können, beschreibe sofort aus einem beliebigen Punkte S (Fig. 13) mit der Seitenlänge (Sn , $S'n'$) des Kegels einen Kreisbogen nmn , trage auf diesen den Umfang der Grundfläche des Kegels auf, und verbinde die Endpunkte n und m mit S . Das Kreissegment nSn bildet alsdann die Entwicklung der ganzen Kegelfläche.

Um nun die Lage irgend zweier gegenüberliegender Punkte des Durchschnittes, z. B. die von c' , cc zu erhalten, ziehe man durch die vertikale Projektion derselben die Linie $c'd'$ parallel mit der Grundlinie, und durch die horizontalen Projektionen die Linien Sc , Sc , welche bis zum Umfange der Grundfläche verlängert werden. Da nun die Punkte, in welchen diese Linien den Umfang der Grundfläche durchschneiden, zwischen dem 5ten und 6ten Theilungspunkte (von n aus gerechnet) liegen, so zieht man in der Entwicklung der Kegelfläche (Fig. 13) zwei Linien Sc , welche den Kreisbogen nmn in 2 Punkten durchschneiden, welche von den Punkten n ebenso weit (um 5 Theilungsbögen) entfernt sind, als in Fig. 11; endlich nimmt man die Linie $S'd'$ (Fig. 10) in den Zirkel und trägt dieselbe von S (Fig. 13) nach c und c . Die Linien Sb , Sb und Sa (Fig. 13) ergeben sich dadurch, dass man die Linien $S'b'$ und $S'a'$ (Fig. 10) unmittelbar von S (Fig. 13) auf die Linien Sn nach b, b und auf Sm nach a trägt. Die Punkte 4, 3, 2, 1 etc. werden auf gleiche Weise bestimmt, wie die Punkte c, c . Endlich werden dieselben durch eine stetige Linie verbunden.

Von den Umwälzungsflächen.

(Taf. 14 und 15.)

Wir haben Seite 57 gesehen, was man unter Umwälzungsflächen versteht und wie dieselben entstehen *).

(Fig. 1—3.)

Die einfachste unter allen Umwälzungsflächen ist die *Kugel*, deren beide Projektionen (Fig. 1 und 2), wie aus dem Früheren bekannt ist, Kreise von dem Durchmesser der Kugel sind.

Isometrische Darstellung einer Kugel.

Zur isometrischen Darstellung einer Kugel, welche in allen Fällen als ein Kreis erscheint, kann man auf zweifache Weise verfahren, von welchen die erste die einfachste und daher auch die vorzüglichere ist.

Erste Auflösung. Es ist aus dem Früheren klar, dass in der isometrischen Darstellung einer Kugel alle Parallelkreise z. B. $c'd'$ (Fig. 1), welche mit der Grundlinie parallel laufen, als Ellipsen erscheinen (welche beiläufig gesagt, in Rhomben eingeschrieben sind, deren Seiten die isometrische Lage besitzen), und dass die isometrische Projektion des grössten durch den Mittelpunkt m' (Fig. 1) gehenden Parallelkreises auch die grösste unter allen Ellipsen sein muss. Die Endpunkte des grössten Durchmessers (der grossen Axe) dieser Ellipse müssen daher auf dem Umfange des Kreises liegen, welcher die isometrische Projektion der Kugel bildet, während der Mittelpunkt der Ellipse offenbar mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt.

*) Aus der Entstehungsweise der Umwälzungsflächen geht hervor, dass alle Kreiszylinder- und alle Kreiskegelflächen ebenfalls als Umwälzungsflächen betrachtet werden können.

Die Konstruktion, welche aus dieser Betrachtung hervorgeht, ist daher folgende:

Man umgebe (Fig. 2) die horizontale Projektion der Kugel mit einem Quadrate 1,2,3,4, konstruiere die isometrische Projektion dieses Quadrates (1,2,3,4 Fig. 3) *), zeichne die entsprechende Ellipse hinein und beschreibe endlich aus dem Mittelpunkte m derselben mit der halben grossen Axe der Ellipse einen Kreis; dieser bildet alsdann die isometrische Projektion der Kugel.

Zweite Auflösung. Denkt man sich die Kugel mit einem Würfel umgeben, dessen horizontale Projektion das Quadrat 1,2,3,4 (Fig. 2) ist, so muss die Richtung, nach welcher die Kugel, dem isometrischen Prinzip gemäss, betrachtet wird, mit der Diagonale dieses Würfels parallel sein, und diese Richtung kann demnach bestimmt werden, wenn man diejenige der Diagonale bestimmt, indem man durch die Diagonale und die daranliegende Seite des Würfels eine Ebene legt. Hiedurch entsteht ein rechtwinkliches Dreieck, welches gebildet wird 1) von der Seite des Würfels als der ersten Kathete, 2) von der Diagonale einer Fläche als der zweiten Kathete, und 3) von der Diagonale des Würfels als der Hypothenuse.

Wenn man daher irgend eine Linie or (Fig. 1) auf der Grundlinie senkrecht errichtet, über dieser ein Quadrat $opqr$ konstruiert, die Diagonale oq des Quadrates von o nach s trägt und endlich die Linie rs zieht, so bildet diese die Diagonale des Würfels, dessen Seite or ist; legt man nun sofort parallel mit dieser an die vertikale Projektion der Kugel, die Tangenten c' und d' , und

*) Da diese Projektion ein Rhombus mit den Winkeln von 60° und 120° ist und den Durchmesser der Kugel zur Seite hat, so kann die Konstruktion desselben auch unmittelbar geschehen, sobald man den Durchmesser der Kugel kennt.

zieht man durch die Berührungspunkte die mit der Grundlinie parallelen Linien $c'd'$, $c'd'$, so ist offenbar, dass dieses die Kreise sind, welche den sichtbaren Theil der isometrischen Projektion der Kugel von oben und unten begränzen, und ebenso, dass es der Durchmesser $c'm'd'$ ist, welcher in der isometrischen Projektion von keinem andern Durchmesser an Grösse übertroffen werden.

Konstruirt man sofort die horizontale Projektion cd (Fig. 2) der beiden Kreise $c'd'$ (Fig. 1), und erinnert man sich, dass die Diagonale des Würfels zur horizontalen Projektion die Linie 1,3 besitzt, so ist klar, dass die Berührungspunkte der beiden Kreise $b d a c$ in d und c nur dann liegen könnten, wenn, wie wir oben stillschweigend angenommen haben, die Diagonale des Würfels parallel mit der vertikalen Projektionsebene wäre, und dass dieselben, wie sich aus der Figur ergibt, immer da liegen müssen, wo die horizontale Projektion 1,3 der Diagonale des Würfels, die horizontale Projektion $c b d a$ der beiden Kreise $c'd'$ (Fig. 1) durchschneidet.

Umgibt man daher den Kreis $c b d a$ mit einem Quadrate 5,6,7,8, konstruirt man die isometrischen Projektionen dieser Quadrate (Fig. 3) und zeichnet in diese die entsprechenden Ellipsen ein, so ergeben sich die beiden Punkte a und b , und der mit ma oder mb beschriebene Kreis ist die isometrische Projektion der Kugel.

Fig. 4. — Fig. 7.

Aufgabe. Man soll die durch den Auf- und Grundriss (Fig. 4—5) gegebene Umwälzungsfläche, isometrisch darstellen.

Auflösung. Weil bei der Umdrehung der die Umwälzungsfläche erzeugenden krummen Linie $f/D' d e'e'$ C IV.... um die Axe $M'M'$ (Fig. 4) ein jeder Punkt derselben einen Kreis beschreibt, so ist wohl klar, dass man

zur Darstellung der isometrischen Projektion einer Umwälzungsfläche, nur die isometrischen Projektionen einer grossen Anzahl nahe aneinander liegender Parallelkreise zu konstruiren, und diese durch eine stetige Linie welche dieselben berührt, zu verbinden hätte.

Man würde indessen in der Ausführung, ohne die Anwendung besonderer Kunstgriffe und weiterer Betrachtungen auf ganz unerwartete Schwierigkeiten stossen, deren Lösung der Zweck dieser Aufgabe ist.

Aus Betrachtung der Fig. 4 ergibt sich, dass der isometrisch darzustellende Körper aus folgenden Haupttheilen besteht.

- 1) Aus einem zylindrischen Aufsätze $f'f'$.
- 2) Aus einer kleinern Umwälzungsfläche $fD'd$, erzeugt durch die Bewegung eines Kreisbogens.
- 3) Aus dem kleinen Zylinder $e'e'$.
- 4) Aus der grösseren Umwälzungsfläche, erzeugt durch die Bewegung der krummen Linie $e'C'IV'V', VI', III', II', e'c'$.
- 5) Aus dem kleinen Zylinder $c'c'$.
- 6) Aus einem Wulste, erzeugt durch die Bewegung des Halbkreises $b'I'a'I'b'$.
- 7) Aus einer viereckigen Platte.

Da wir nun über die Darstellung der Zylinderflächen schon früher gesprochen haben, so bleibt uns nur noch die Darstellung der eigentlichen Umwälzungsflächen unter Nro 2, Nro 4 und Nro 6 übrig.

Zu diesem Zwecke durchschneidet man die Umwälzungsflächen in entsprechenden Höhen durch Ebenen, $D'D', C'C', IV'IV', V'V', III'III', II'II', e'e', I'I', a'a'$, welche mit der horizontalen Projektionsebene parallel sind und konstruirt die horizontalen Projektionen der Kreise, welche die Durchschnitte der Umwälzungsflächen und der

eben genannten Ebenen bilden. Den grössten dieser Kreise theilt man sofort in eine beliebige Anzahl, z. B. in 16 gleiche Theile, woraus sich die Punkte $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ ergeben, und konstruirt nun die isometrischen Projektionen dieser Punkte (Fig. 6).

Diese Konstruktion wird auf folgende Weise ausgeführt.

1) Man konstruirt zuerst die isometrische Projektion $M a_3 v a_7$ (Fig. 6) des Quadrates $v a_3 M a_7$, in welches der vierte Theil der Umwälzungsfläche eingeschrieben ist, (Fig. 5.)

2) Man trage die auf den Seiten des Quadrates befindlichen Linien $a_7 n$ und $a_3 m$ (Fig. 5) nach $a_7 n$ und $a_3 m$ (Fig. 6) und ziehe die Linie $m n$. Hierdurch ergibt sich auf $M v$ der Punkt a_5 .

3) Man trage die Linien $a_7 x$ und $v x$ (Fig. 5) nach $a_7 x$ und $v x$ (Fig. 6) und ziehe die Linie $x x$, welche die Linien $M n$ und $M s$ in zwei neuen Punkten a_6 und a_8 durchschneidet.

4) Man trage die auf $M n$ und $M s$ befindlichen Linien $M a_6$ und $M a_8$ auf die Linien $M m$ und $M t$.

5) Die auf der Linie $u M u$ (Fig. 6) befindlichen Punkte a_1 und a_9 werden dadurch erhalten, dass man die Linien $u s$ und $u t$ (Fig. 5) nach $u s$ und $u t$ (Fig. 6) trägt, und die Linie $s t$ zieht.

Verbindet man die zwischen den Linien $M u$ und $M v$ befindlichen Punkte a_1, a_2, a_3 , so wie sie auf einander folgen, durch gerade Linien, so erhält man den vierten Theil der isometrischen Projektion des in den grössten Kreis $a_1, a_2, a_3 \dots$ (Fig. 5) eingeschriebenen regelmässigen Sechszehneckes, um welches der vierte Theil der dem Kreise entsprechenden Ellipse, wenn es nicht überflüssig wäre, mit leichter Mühe beschrieben werden könnte.

Um nun die Sechszehneck aller übrigen Hauptkreise der Umwälzungsfläche ebenfalls zu erhalten, trage man auf die isometrische Linie Ma_3 (Fig. 6) die Radien derselben auf und ziehe durch die Punkte V_3, IV_3 parallel mit den Seiten des Sechszehneckes $a_1, a_2, a_3 \dots$ die in Fig. 6 angezeigten Hülfslinien. Diese ersetzen einen genauen isometrischen Grundriss der Umwälzungsfläche vollkommen.

Man verlängert nun die Linie vM aufwärts nach D (Fig. 7), bestimmt auf dieser Verlängerung, welche die isometrische Projektion der Axe der Umwälzungsfläche bildet, aus Fig. 4 die Lage der Mittelpunkte aller Hauptkreise, zieht durch dieselben senkrecht auf die Axe die Linien ff, ee, CC, IV, IV, II und aa , und trägt die Linien $MV_1, MIV_1, MIII_1, MC_1, Mf_1$ u. s. w., welche sich auf Mu (Fig. 6) befinden, auf die ebengezogene Linien auf. Werden die so erhaltenen Endpunkte durch eine Linie verbunden, welche der Natur der verschiedenen Theile der Umwälzungsfläche entspricht, so ergibt sich die isometrische Projektion eines Axendurchschnittes, dessen isometrischer Grundriss die auf Mu (Fig. 6) befindliche Linie Ma ist.

Nun werden vermitteltst Fig. 6 auch die übrigen Axendurchschnitte konstruirt, deren isometrische Grundrisse die Linien Ma_2, Ma_3, Ma_4 und Ma_5 darstellen, indem man zu diesem Zwecke (Fig. 7) die Punkte $a_2, a_3, a_4, \dots I_2, I_3, I_4$ u. s. w. auf folgende Weise bestimmt.

Bestimmung der Punkte a_2, a_3, a_4 u. s. w.

1) Ueber der Linie aa (Fig. 7) bestimme man das Dreieck Ma, a_2 (Fig. 6) ohne jedoch die Seiten a, a_2 und a_2a zu ziehen.

2) Ueber der Linie aa_2 (Fig. 7) bestimme man das zweite Dreieck $Ma_2 a_3$ (Fig. 6).

3) Ueber $a a_3$ (Fig. 7) bestimme man das dritte Dreieck $M a_3 a_4$ (Fig. 6), und endlich

4) Ueber $a a_4$ (Fig. 7) bestimme man das Dreieck $M a_4 a_5$ (Fig. 6).

Um die Punkte I_2, I_3, I_4 (Fig. 7) zu erhalten, verfährt man auf gleiche Weise. Man bestimme nämlich:

1) Ueber den beiden Linien $I I_1$ (Fig. 7) die zwei Dreiecke $I I_1 I_2, I I_1 I_2$, welche dem Dreiecke $M I_1 I_2$ (Fig. 6) gleich sind.

2) Ueber den Linien $I I_2$ (Fig. 7) bestimme man die Dreiecke $I I_2 I_3$ gleich dem Dreiecke $M I_2 I_3$ (Fig. 6) ff.

Hat man auf solche Weise die Hauptpunkte aller Kreise erhalten, und diese durch entsprechende Linien, welche sich nach der Natur der verschiedenen Theile der Umwälzungsfläche richten, sorgfältig mit einander verbunden, so kennt man die Gestalt und die Lage *eben so vieler Axendurchschnitte*, als die halbe Anzahl der auf einem jeden Kreise bestimmten Hauptpunkte, beträgt.

Wir haben indessen diese Axendurchschnitte, deren Anzahl in unserem Falle gleich acht ist, nicht alle und eben so wenig für alle Theile der Umwälzungsfläche vollständig konstruirt, sondern immer nur so viele und in so weit vollständig als gerade nöthig war, um hieraus die Begränzungslinien der verschiedenen Theile des isometrisch darzustellenden Körpers, bestimmen zu können.

So z. B. reichten zur Konstruktion des Wulstes *sechs* Axendurchschnitte, und zur Konstruktion der obersten kleinen Umwälzungsfläche, *vier* Axendurchschnitte vollkommen aus.

Eigenthümliche Schwierigkeiten bietet die Begränzung des mittleren Theiles $e' C' IV' \dots II' e' c'$ (Fig. 4) der Umwälzungsfläche dar, indem diese in den Punkten BB plötzlich abbricht.

Um diese Punkte welche man in der analytischen Geometrie *Umkehrungspunkte* nennt, praktisch zu bestimmen, kann man auf zweifache Weise verfahren.

1) Man lege durch den mittleren Theil der Umwälzungsfläche (Fig. 4) parallel mit der horizontalen Projektionsebene eine Reihe von Hülfebenen $C'C'$, $IV'IV'$, $V'V'$, $III'III'$, $II'II'$, welche die Umwälzungsfläche nach eben so vielen Kreisen durchschneiden, konstruire (Fig. 7) die diesen Kreisen entsprechende Ellipsen und verbinde dieselben durch eine sie berührende Linie VB.

Man wird alsdann finden, dass die Berührungslinie die konstruirten Ellipsen bis zu den Punkten B an ihren konvexen Seiten berührt, von hier an sich gegen die Axe der Umwälzungsfläche wendet, und die Ellipsen sofort nach ihren konkaven Seiten berührt.

Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass auch die *Axendurchschnitte* von der Kurve BBB berührt werden.

2) Man denke sich in die darzustellende Umwälzungsfläche eine Reihe von Kugeln eingeschrieben, welche dieselbe in ziemlich nahe aneinander liegenden Punkten IV' , V' , IV' , III' , II' , B u. s. w. berühren, und deren Mittelpunkte sich in der Axe der Umwälzungsfläche befinden. Von diesen Kugeln konstruire man ihre isometrischen Projektionen nach einer der beiden oben gezeigten Methoden und ziehe sofort an die Kreise welche die Projektionen der Kugel bilden eine berührende Linie. Um die Figur nicht zu verwirren wurde nur eine dieser Kugeln dargestellt.

Um den mittleren Punkt B so wie den höchsten Punkt D und den tiefsten Punkt A der verschiedenen Begrenzungslinien der Umwälzungsfläche (Fig. 7) unmittelbar zu bestimmen, konstruire man (Fig. 4) die wahre Richtung $v'r$ der Diagonale eines Würfels, ziehe mit dieser parallele Linien, welche die Erzeugende der Umwälzungs-

fläche in den Punkten A, B und D berühren, lege durch A, B und C parallel mit der Grundlinie die Linien AA, BB und CC, und konstruire endlich in Fig. 7 die diesen Parallelkreisen entsprechende isometrische Projektionen. Diese Projektionen werden die Axe AD (Fig. 7) in den gesuchten Punkten A, B und D durchschneiden.

DRITTER ABSCHNITT.

AUFLOESUNG DES ALLGEMEINSTEN FALLES DER GEOMETRISCHEN PROJEKTIONSLEHRE NACH DEM PRINZIP DER ISOMETRISCHEN PROJEKTIONSLEHRE.

(Taf. 16.)

Wir haben bei der näheren Auseinandersetzung des isometrischen Prinzipes (Seite 91) gesehen, dass es für eine vierseitige rechtwinkliche Säule nur eine *einzige* Stellung gibt, bei welcher die horizontalen Projektionen ihrer senkrecht aufeinander stehenden Kanten und aller mit dieser parallelen Linien in demselben Verhältnisse kürzer als die Kanten werden, während bei allen übrigen Stellungen die Verkürzung der Kanten immer in einem ungleichen Verhältnisse statt findet.

Auch haben wir an jener Stelle (Seite 91) bemerkt, dass bei einer solchen Drehung der rechtwinklichen Säule, wie dieselbe auf Seite 77 festgesetzt ist, die *Längen- und Breitenkante* immer in demselben Verhältnisse verkürzt werden, während die *horizontale Projektion der Höhenkante*, die mit der Grösse der Drehung wächst, in allen Fällen den von der *Längen- und Breitenkante* gebildeten Winkel halbt.

Aus dieser einfachen Bemerkung ergibt sich eine für die Architekten sehr wichtige Projektionsmethode, welche einen jeden gegebenen Körper nach irgend einer Richtung auf einer darauf senkrecht stehenden Ebene so darzustellen lehrt, dass alle wahren Dimensionen des Körpers ohne Schwierigkeit entweder unmittelbar, oder durch eine ganz einfache Konstruktion bestimmt werden können. Diese Methode ist besonders anwendbar bei der Darstellung architektonisch verzierter Façaden oder auch ganzer Gebäude, indem sie die Augenperspektive nicht nur ersetzt, sondern an praktischem Werthe bei weitem übertrifft. *)

Das Wesen dieser neuen Projektionsmethode wird aus der Auflösung folgender Aufgabe vollkommen deutlich werden.

Fig. 1 — 12.

Aufgabe. Man soll die durch ihren Grund- und Aufriss Fig. 1 und 2 gegebene rechtwinkliche Säule, sowie die in dieselbe eingeschriebene vierseitige Pyramide, so darstellen, als betrachte man dieselbe (das Auge in unendlicher Entfernung gedacht) nach einer Richtung MN, welche mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist.

Auflösung. Fassen wir diese Aufgabe in andere Worte, so lässt sich dieselbe auch auf folgende Weise aussprechen: Man soll die rechtwinkliche Säule Fig. 1 und 2 auf eine Ebene projiciren, welche auf der Linie MN (Fig. 1) senkrecht steht. Hierzu führt aber folgende Konstruktion. Man ziehe durch den Punkt c' (Fig. 1) parallel mit MN die

*) Nur einen einzigen Fall gibt es, wo die Augenperspektive durch keine andere Projektionsmethode ersetzt werden kann, und dieser findet Statt bei der Darstellung einzelner innerer Räume, wo dem Auge Boden und Decke zugleich sichtbar sein sollen.

Hilfslinie $c'r$, beschreibe mit $c'r$ einen Bogen rr' , errichte (Fig. 3) auf der Grundlinie eine Senkrechte $c'r$, beschreibe mit dieser gleichfalls einen Bogen $rr' = rr'$ (Fig. 1) verbinde den Punkt r' mit c' und trage die Linie $c'a'$ (Fig. 1) von c' nach a' (Fig. 3).

Ueber $c'a'$ (Fig. 3) konstruiere man sofort das Rechteck $a'a'c'c'$ gleich dem Rechtecke $a'a'c'c'$ (Fig. 1) und ziehe die Linie $b'b'$. Auf diese Weise erhält man die vertikale Projektion der Säule (Fig. 1 und 2), nach einer solchen Drehung auf der horizontalen Projektionsebene, dass die Richtung MN oder $c'r$ (Fig. 1) nach welcher die Säule betrachtet werden soll auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht.

Aus Fig. 3 und Fig. 2 ergibt sich sodann mit leichter Mühe die horizontale Projektion Fig. 4, welche die verlangte Ansicht der Säule nach der Richtung MN darstellt.

Da jedoch in dieser Darstellung die wahren Dimensionen verloren gegangen sind, so denke man sich, um dieselben wieder zu erhalten, die Längen-, Breiten- und Höhenkante der gegebenen Säule so lange in demselben Verhältnisse vergrößert, bis die horizontale Projektion ab'' (Figur 4) der vergrößerten Längen- oder Breitenkante gleich der ursprünglichen Längen- oder Breitenkante wird, und ziehe weil die dieser Bedingung entsprechende neue Projektion der früheren offenbar ähnlich werden muss, durch den Punkt b'' parallel mit ba die Linie $b''a''$. Auf diese Weise ergibt sich als die neue Projektion der Höhenkante die Linie aa'' , und man erhält nun die Darstellung des ganzen Körpers auf folgende Weise.

1) Man konstruiere (Fig. 12) mit der Seite ab'' (Fig. 4) $= ab$ (Fig. 1) ein Rhombus ABDC (Fig. 12) dessen stumpfer Winkel $DAB = dab$ (Fig. 4) ist.

2) Man ziehe durch die Eckpunkte dieses Rhombus mit der Höhenaxe d. h. der Halbierungslinie des stumpfen Winkels DAB oder DCB parallele Linien, und trage auf einer jeden derselben die Linie $a a''$ (Fig. 4) auf. Endlich

3) Man verbinde die Endpunkte A, B, C und D durch die Linien AB, BC, CD und DA.

An das erhaltene Resultat lassen sich nun folgende Bemerkungen schliessen.

1) Alle Linien welche (Fig. 12) mit den Linien AD und AB oder mit CD und CB parallel sind, stehen ursprünglich (Fig. 2) senkrecht auf einander, und besitzen die *wahre Länge* derjenigen Linien, deren Projektionen sie bilden.

2) Alle mit der (vertikalen) Höhenkante AA parallele Linien stehen auf der Grundfläche ABCD senkrecht, und sind entweder in demselben Verhältnisse *grösser* oder in demselben Verhältnisse *kleiner* als diejenigen Linien, deren Projektionen sie bilden. Man kann daher solche Projektionen mit Recht *zweiaxig-isometrische* Projektionen nennen, zum Unterschiede der gewöhnlichen isometrischen Projektionen, in welchen die Längen-, Breiten- und Höhenkante sowie aller mit dieser parallelen Linien auf gleiche Weise verkürzt sind.

Um daher die Lage irgend eines Punktes S, S' Fig. 1 und 2 im Raume zu bestimmen, ist es nöthig einen Massstab zu konstruiren, durch welchen die Höhen aller Punkte z. B. S's' (Fig. 1) sehr schnell in dem entsprechenden Verhältnisse entweder vergrössert oder verkleinert werden können.

Konstruktion des Höhenmassstabes für den Fall, wo die Höhen in demselben Verhältnisse vergrössert werden müssen (Fig. 5).

Man ziehe (Fig. 5) eine unbestimmte Linie $a a''$, nehme die Höhe ($a' a'$) der gegebenen Säule (Fig. 1) in den Zirkel,

trage dieselbe nach aa (Fig. 5) und beschreibe über dieser Linie das gleichseitige Dreieck aaa . Nun trage man die Projektion $a a''$ der Höhenkante (Fig. 4) von a nach a'' (Fig. 5) und verbinde den Punkt a'' mit der Spitze a des gleichseitigen Dreiecks durch die Linie aa'' .

Bemerkung. Statt dieser Konstruktion könnte man sich jedoch in diesem Falle eben so zweckmässig auch der folgenden bedienen. Wir wollten hiermit die Aufmerksamkeit des Anfängers nur auf ein neues geometrisches Hilfsmittel hinlenken, dessen man sich immer dann zu bedienen hat, wenn mehrere gegebene Linien so vergrössert werden sollen, dass sie nahezu zwei oder mehreremal so gross werden als ursprünglich.

Konstruktion des Höhenmaassstabes für den Fall wo Höhen in demselben Verhältnisse verkleinert werden sollen (Fig. 6).

Dieser uns schon längst bekannte Massstab ist nicht nur nöthig, wenn die Höhen einer zwei-axig-isometrischen Projektion kleiner sind, als die ursprünglichen Höhen, sondern auch dann, wenn aus den grösseren Höhen einer solchen Projektion (Figur 12) die ursprünglichen Höhen wieder hergeleitet werden sollen.

Zur Konstruktion des Massstabes beschreibe man, wie schon früher gezeigt wurde, mit der gegebenen Höhe $a''a$ (Fig. 6) einen Kreisbogen, trage die kleinere Höhe aa zu welcher die erste verkürzt wird, als Senne auf, und ziehe die Verbindungslinien $a''a$ und $a''a$.

Bestimmung des Punktes S (Fig. 12).

Soll nun ein beliebiger Punkt S, S' (Fig. 1 und 2) im Raume, in der zwei-axig-isometrischen Projektion Fig. 12 bestimmt werden, so ziehe man durch die horizontale Pro-

jektion S (Fig. 2) parallel mit ab die Hülfslinie xy , trage die Linien dx und cy nach Dx und Cy (Fig. 12), ziehe die Linie xy und nehme sy (Fig. 12) $= Sy$ (Fig. 2). Nun lege man durch die horizontale Projektion s , parallel mit einer Höhenkante AA , die Linie sS , beschreibe mit der Höhe $S's'$ (Fig. 1) aus dem Scheitelpunkte a des Massstabes (Fig. 5) den Bogen $S's'$, ziehe die Verbindungslinie $S's'$, welche den Schenkel aa'' des Massstabes in s'' durchschneidet, und trage die Linie $S's''$ (Fig. 5) von s nach S (Fig. 12).

Verbindet man den Punkt S mit den Punkten A, B, C und D , so erhält man die zweiachsig-isometrische Projektion der von der rechtwinklichen Säule eingeschlossenen Pyramide $Sabcd$ (Fig. 1 und 2).

Sollte wieder umgekehrt aus der Linie Ss (Fig. 12) die ursprüngliche Höhe $S's'$ (Fig. 1) der Pyramide bestimmt werden, so darf man nur mit Ss aus dem Scheitel a'' des verkleinernden Winkelmasstabes (Fig. 6) den Kreisbogen $S's'$ beschreiben; die Senne $S's'$ ist alsdann die ursprüngliche Höhe $S's'$ (Fig. 1).

Fig. 8., Fig. 9., Fig. 10., Fig. 11.

Aufgabe. Man soll einen gegebenen Körper so darstellen, dass man von demselben eine Ansicht nach der durch die Projektionen AD und RS (Fig. 9 und 8) gegebenen Richtung erhält; oder: Man soll einen gegebenen (beliebig geformten) Körper auf einer Ebene projiciren, welche auf dieser Richtung senkrecht steht.

Auflösung. Man beschreibe über der horizontalen Projektion der Richtung mit beliebigem Durchmesser einen Kreis, errichte in der Mitte des Durchmessers AD auf diesem die Senkrechte BC , vollende das Quadrat $ABCD$, betrachte dieses als den Grundriss einer quadratischen Säule, ziehe sofort aus A senkrecht auf die Grundlinie,

die Linie $A'A'$ (Fig. 8) und durch s' parallel mit RS die Linie $s'A'$. Hiedurch wird die Länge von $A'A'$ bestimmt, welche man als die der quadratischen Säule zugehörige Höhe betrachtet.

Nun denke man sich die Grundfläche der Säule um den Mittelpunkt m so weit gedreht, bis sich die Diagonale AD in der mit der Grundlinie parallelen Lage ad befindet, ziehe durch a senkrecht auf die Grundlinie, die Linie $a'a'$ und durch A' parallel mit der Grundlinie die Linie $A'a'$, und verbinde endlich den Punkt s' mit a' . Hieraus ergibt sich die Linie $s'a'$, welche die wahre Lage der durch die Projektion RS und AD bestimmten Linie anzeigt, weil dieselbe durch die Drehung des Dreieckes $s'A'A'$ (Fig. 8) eine zur vertikalen Projektionsebene parallele Lage erhalten hat.

Um nun die Grösse der Höhenkante $a'a'$ oder $A'A'$ zu bestimmen, wenn diese auf eine zur Linie $s'a'$ senkrecht stehenden Ebene projicirt wird, drehe man das rechtwinkliche Dreieck $a'a's'$ so lange um s' bis die Gerade $a's'$ in eine auf der Grundlinie senkrecht stehende Lage kömmt. Die kleinere Linie $a's'$, welche die vertikale Projektion der beiden Kanten ab und ac bildet, fällt alsdann nach $s'n'$, und es ergibt sich endlich aus der vertikalen Projektion $m'n's'$ 1) die horizontale Projektion nm (Fig. 9) der Höhenkante und 2) die horizontalen Projektionen nb und nc der Längen- und Breitenkante, sowie 3) der von der Längen- und Breitenkante eingeschlossene Winkel. Trägt man endlich die Seite ab des Quadrates $abcd$ (Fig. 9) von n nach p und zieht durch p parallel mit bm die Linie pq , so ergibt sich als die Höhe der zwei-axig-isometrischen Projektion der Säule die Linie nq . Da nq kleiner ist als $A'A'$, und folglich alle Höhenlinien in dem Verhältnisse von $A'A'$ zu nq verkleinert werden müssen, so konstruirt man zunächst den Massstab

Fig. 11, wo $An = A'A'$ und $nq = nq$ (Fig. 9) ist; dann aber auch den Massstab Fig. 10, wo alle verkürzten Höhen wieder in dem Verhältnisse der Linien nq und $nA = A'A$ Fig. 8 vergrößert werden können.

Nach Ausführung dieser Vorbereitungskonstruktionen wird nun die zweiaxige-isometrische Projektion des gegebenen Körpers auf folgende Weise ausgeführt.

1) Man umgibt den geometrischen Grundriss des Körpers mit einem Rechtecke oder einem Quadrate, dessen Seiten mit denjenigen des Quadrates ABCD (Fig. 9) parallel sind, und bezieht die Punkte des Grundrisses durch senkrechte Linien auf die Seiten des umschriebenen Rechteckes.

2) Man konstruirt ein Parallelogramm dessen Seiten gleich den Seiten des Rechteckes sind, und abwechselnd den Winkel cnb (Fig. 9) und die Ergänzung desselben zu zwei Rechten einschliessen.

3) In dieses Parallelogramm konstruirt man die Punkte des geometrischen Grundrisses ein, beachtend, dass alle mit den Seiten des Parallelogrammes parallel gezogene Linien senkrecht auf einander stehen.

4) In allen Punkten des Grundrisses errichte man vertikale Linien. Dieselben müssen mit der Halbirungslinie des isometrisch-rechten Winkels cnb parallel sein.

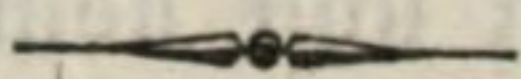
5) Die durch den geometrischen Aufriss bestimmten Höhen der Punkte. werden mittelst des Massstabes (Fig. 11) entsprechend verkürzt und auf die so eben gezogenen Vertikallinien aufgetragen.

6) Die so bestimmten Punkte werden durch gehörige Linien mit einander verbunden.

Hierbei hat man sich beständig des Satzes zu erinnern, dass gleiche und parallele Linien auch gleiche und parallele Projektionen besitzen, weil die Anwendung dieses

wichtigen Satzes die Konstruktion in vielen Fällen sehr erleichtert und beschleunigt.

Mit der Lösung eines speziellen Beispiels haben wir uns im fünften Abschnitte beschäftigt.



VIERTER ABSCHNITT.

ANWENDUNG DER ISOMETRISCHEN PROJEKTIONS- LEHRE AUF DIE BESTIMMUNG DES SCHATTENS UND DER BELEUCHTUNG EINES KOERPERS.

Wenn ein undurchsichtiger Körper von den Sonnenstrahlen nach irgend einer Richtung beleuchtet wird, so lassen sich darüber folgende Sätze aufstellen:

1) Diejenigen Flächen des Körpers, welche zu den Lichtstrahlen am wenigsten geneigt sind, oder deren Lage der senkrechten am nächsten kommen, erhalten unter allen die intensivste Beleuchtung, und es ist daher dieselbe am stärksten auf solchen Ebenen, die auf den Lichtstrahlen senkrecht stehen, und am schwächsten oder Null auf solchen Flächen, welche mit den Lichtstrahlen parallel sind.

Will man daher die *Beleuchtung* eines Körpers für eine jede einzelne Fläche bestimmen, so ist es nöthig, dass man denselben nach der Richtung betrachte, welche die ihn beleuchtenden Sonnenstrahlen besitzen, weil sich alsdann von zweien oder mehreren gleich grossen Flächen, immer diejenigen als die kleinsten darstellen werden, welche zur Richtung am meisten geneigt und daher auch am wenigsten beleuchtet sind.

2) Besteht der Körper aus einer undurchsichtigen Masse, so müssen die Lichtstrahlen an allen vorspringenden Kanten vorbeistreichen, und diejenigen Punkte des Körpers, in welchen derselbe von den Lichtstrahlen gestreift oder berührt wird, müssen vereinigt die *Gränzlinie* bilden zwischen dem beleuchteten und dem unbeleuchteten Theile des Körpers.

Wenn man daher den Körper nach der Richtung der Lichtstrahlen betrachtet — oder mit anderen Worten: Wenn man den Körper auf eine Ebene projicirt, welche auf der Richtung der Lichtstrahlen senkrecht steht, und es fallen in dieser Projektion zwei oder mehrere Punkte des Körpers in einem Punkte zusammen, so ist nur ein Punkt, nämlich der dem Auge zunächst liegende, der beleuchtete, während die übrigen vom Auge entfernteren Punkte *Schattenpunkte* sind, und daher auf der Gränzlinie des beleuchteten und unbeleuchteten Theiles liegen müssen.

3) Wenn der Körper auf einer Ebene steht und hinter demselben eine zweite Ebene oder irgend ein anderer Körper aufgestellt ist, so kann man annehmen, dass Alles zu einem Körper vereinigt sei, und sofort die beiden vorhergehenden Sätze strenge anwenden.

Mit Hülfe dieser drei einfachen Prinzipien lässt sich in der horizontalen und vertikalen Projektion eines Körpers sowohl die Beleuchtung desselben als die Licht- und Schattengränze durch die Anwendung der in den früheren Kapiteln vorgekommenen Konstruktionen mit leichter Mühe bestimmen.

Denkt man sich nämlich die Lichtstrahlen seien parallel mit der Diagonale eines Würfels, so ist klar, dass bei einer solchen Voraussetzung *dieselben Theile des Körpers beleuchtet werden müssen*, als diejenigen sind, welche sich

dem Auge in der *isometrischen Projektion* darstellen, weil ja das Wesen dieser Projektion darin besteht, dass man sich in oder um den Körper einen Würfel denkt, und demselben zugleich mit dem Körper eine solche Stellung zur horizontalen Projektionsebene gibt, dass die Diagonale des Würfels auf dieser senkrecht steht. Indem wir daher noch einmal an die vorhergehenden Sätze erinnern, stellen wir zur Konstruktion der Beleuchtung und des Schattens sowohl desjenigen, welchen der Körper auf sich selbst trägt, wie auch desjenigen, welchen er auf einen anderen Körper oder auf die beiden Projektionsebenen wirft, folgende Regel auf:

1) Ist die Richtung der Lichtstrahlen mit der Diagonale eines Würfels parallel, so konstruiere man die isometrische Projektion des beleuchteten Körpers nebst derjenigen der ihn umgebenden Körper und der beiden Projektionsebenen, auf welchen sich sein Auf- und Grundriss befindet.

2) Allen denjenigen Flächen welche in der isometrischen Projektion unsichtbar sind, oder als Linien erscheinen, gebe man in der vertikalen und horizontalen Projektion des Körpers, den vollen Schatten.

3) Man bestimme aus den geometrischen Projektionen des Körpers *a)* welche Flächen gleich sind, *b)* in welchem Verhältnisse ungleich grosse Flächen stehen. Zwei gleiche Flächen welche in der isometrischen Projektion ebenfalls gleich erscheinen, werden alsdann gleich schwach oder gleich stark schattirt. — Von zwei gleichen Flächen hingegen, welche in der isometrischen Projektion ungleich gross erscheinen, wird die kleinere in demselben Verhältnisse dunkler schattirt als dieselbe kleiner erscheint. — Von zwei ungleichen Flächen welche in der isometrischen Projektion *gleich* erscheinen, wird die grössere in den geometrischen Projektionen *dunkler* schattirt; erscheinen sie hingegen in der isometrischen Projektion ungleich, und

zwar so dass die grössere Fläche kleiner als die kleinere erscheint, so wird die erstere in demselben Verhältnisse dunkler schattirt als sie zu klein erscheint. Würden sich z. B. zwei Flächen in der Wirklichkeit wie 5 : 2 verhalten, ihre Flächenräume in der isometrischen Projektion aber nur von 2 : 3, so müsste die Beleuchtung der grösseren Fläche $= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ oder $= \frac{4}{15}$ derjenigen der kleineren Fläche sein, d. h. die kleinere Fläche wäre $3\frac{3}{4}$ mal stärker beleuchtet als die grössere. Im Allgemeinen erhält man die relative Stärke der Beleuchtung zweier Flächen dadurch, dass man das Verhältniss ihrer scheinbaren Flächenräume in der isometrischen Projektion, mit dem umgekehrten Verhältnisse ihrer wahren Flächenräume multipliziert.

4) Alle diejenigen Punkte auf den *Gränzlinien* der isometrischen Projektion, welche mehreren Punkten zugleich entsprechen, sei es dass diese dem Körper oder den beiden isometrisch dargestellten Projektionsebenen angehören, bestimme man mit Hülfe des isometrischen Grundrisses, sowohl in der horizontalen als in der vertikalen Projektion des Körpers, und vereinige dieselben durch entsprechende Linien; diese bilden sodann die Gränze zwischen dem beleuchteten und dem unbeleuchteten Theile des Körpers oder der beiden Projektionsebenen.

Eine nähere Erklärung der Figuren 1, 2 und 3 Taf. 17 wird das Gesagte deutlicher machen.

Fig. 1 und 2 stellen den Auf- und Grundriss einer regelmässigen fünfseitigen Säule dar, die mit einer regelmässigen sechsseitigen Platte bedeckt ist. Auf der Platte selbst steht wieder eine regelmässige fünfseitige Pyramide mit einer Grundfläche, welche derjenigen der Säule gleich ist.

TNT Fig. 1 ist die vertikale und TNZ Fig. 2 die horizontale Projektion einer schief aufgestellten Ebene, auf welche die vor derselben befindliche Säule und Pyramide einen Theil ihres Schattens wirft.

Fig. 3 ist die isometrische Projektion des in Fig. 1 und 2 dargestellten Körpers, der schiefen Ebene, der beiden Projektionsebenen und einer Ebene ZT, TT (Fig. 1 und 2) welche auf den beiden Projektionsebenen senkrecht steht und die schiefe Ebene begrenzt.

Aus der einfachen Betrachtung dieser Figur ergibt sich 1) dass von der Pyramide nur 3 Flächen beleuchtet sind; die beiden übrigen, nämlich $S'KI'$ und $S'I'H'$ müssen daher im geometrischen Auf- und Grundrisse (in so fern dieselben sichtbar sind) schattirt werden; 2) dass von der sechsseitigen Platte gleichfalls nur 3 Flächen beleuchtet sind, und zwar am stärksten die Fläche $A''A'F''F'$; 3) dass von der fünfseitigen Säule 2 Flächen *theilweise* beleuchtet sind, weil der obere Theil derselben durch die Kanten $F''A''$ und $A''B''$ verdeckt wird. Um die Begrenzung der erleuchteten Theile in der vertikalen Projektion Fig. 1 zu konstruiren, bemerke man, dass der Punkt M nicht nur auf der Kante $A''F''$ der sechsseitigen Platte, sondern auch auf der vertikalen Kante LM der fünfseitigen Säule liegt. Nimmt man daher die Linie LM (Fig. 3) in den Zirkel und trägt dieselbe (Fig. 1) von l' nach m' , so erhält man den Schattenpunkt m' . Auf gleiche Weise ergibt sich v' , wenn die Linie GV (Fig. 3) von g' nach v' getragen wird. Die Verbindungslinie $m'v'$ (Figur 1) bestimmt alsdann die Gränzlinie zwischen dem beleuchteten und unbeleuchteten Theile der Fläche $l'g'G''L''$. Die Lage des Punktes A'' (Fig. 3) in dem geometrischen Auf- und Grundrisse Fig. 1 ergibt sich dadurch dass man durch A'' (Fig. 3) eine vertikale Hülfslinie bis zur Kante GH zieht, den

erhaltenen Durchschnittspunkt auf $g'h'$ (Fig. 1) bestimmt, in diesem auf der Grundlinie eine Senkrechte errichtet, und die Höhe des Punktes A'' (Fig. 3) auf diese Senkrechte aufträgt. Endlich bestimmt man die Lage des Punktes X (Fig. 3) in der geometrischen Projektion (Fig. 1) dadurch, dass man die Linie HX von h' nach x' trägt. Verbindet man sofort die Punkte v, a'' und x (Figur 4) durch grade Linien, so ergibt sich die Gränzlinie $va''x''$ des beleuchteten und unbeleuchteten Theiles der Fläche $g'h'H''G''$.

Die darauf folgende sichtbare Fläche $h'i'I''H''$ ist unbeleuchtet und erhält daher den vollen Schatten.

4) Von der vertikalen Projektionsebene $e''NPT$ ist ebenfalls nur ein Theil beleuchtet weil ein anderer Theil durch die Masse des vor derselben befindlichen Körpers bedeckt wird. Die Gränzlinie zwischen dem beleuchteten und unbeleuchteten Theile, bildet die gebrochene Linie $M'MF''E''E'OS'P$. Alle Punkte dieser Gränzlinie werden in der vertikalen Projektionsebene (Fig. 1) auf gleiche und zwar auf folgende Weise bestimmt. Man ziehe durch einen jeden Punkt z. B. durch S' eine vertikale Linie ($S's''$) bis zur Grundlinie TNe'' , trage die Entfernung des Fusspunktes (s'') von einem Hauptpunkte z. B. T (Fig. 3) auf die Grundlinie (Fig. 1) von T nach s' , errichte hier auf der Grundlinie eine Senkrechte ($s''s'$) und trage auf dieser die Höhe des Punktes (S') Fig. 3 auf.

Liegt einer der Punkte wie z. B. M' auf der Grundlinie, so fällt die Errichtung der Vertikalen weg und man trägt alsdann die Entfernung dieses Punktes von T (Fig. 3) einfach von T nach m' .

Wenn auf solche Weise die Punkte $m', m, f'', e'', e', o, s'$ und p bestimmt sind, so werden dieselben durch gerade Linien mit einander verbunden.

5) Auch die horizontale Projektionsebene wird durch die Masse des Körpers theilweise verdeckt, und zwar sind LM' und HXB'' die Gränzlinien. Zur Bestimmung eines Punktes X dieser Gränzlinien in der horizontalen Projektionsebene (Fig. 2) zieht man durch diesen parallel mit der isometrischen Breitenaxe $II\ III$ eine Hülfslinie Xx' bis zur Grundlinie, nimmt die Entfernung des Durchschnittspunktes (x') von dem Punkte T in den Zirkel, trägt dieselbe auf die Grundlinie (Fig. 1) von T nach x' , errichtet in x' eine Senkrechte ($x'x$) und gibt dieser die Grösse der isometrischen Linie Xx' (Fig. 3).

Eben so verfährt man zur Bestimmung des Punktes B'' (Fig. 3), welcher in b'' (Fig. 2) liegt. Der Punkt M' befindet sich auf der Grundlinie und wurde schon oben konstruirt.

6) Auf der schiefen Ebene NZT wird die Gränzlinie des beleuchteten und des unbeleuchteten Theiles durch die gebrochene Linie $PRC'B'B''$ gebildet. Da der Punkt B'' zugleich in der horizontalen und der Punkt P zugleich in der vertikalen Projektionsebene liegt, so ist über ihre Bestimmung nichts Weiteres zu bemerken. Die übrigen Punkte R , C' und B' werden auf folgende Weise konstruirt. (Da die Konstruktion bei allen dieselbe ist, so zeigen wir diese nur für den Punkt R an.) a) Man ziehe durch R parallel mit der horizontalen Leitlinie ZN der schiefen Ebene die Linie $R3$ bis zur Durchschneidung mit ZT' . b) Aus 3 fälle man auf TZ , (welche die Gränzlinie der horizontalen Projektions- und der darauf senkrecht stehenden Profilebene TZ (Fig. 1) bildet) die Vertikale 33 ; diese bestimmt sodann die Höhe der Linie $R3$ und daher auch die Höhe des Punktes R . c) Durch den Fusspunkt 3 ziehe man parallel mit der horizontalen Leitlinie ZN die Hülfslinie $3r'$, welche, wie leicht einzusehen, den isome-

trischen Grundriss der Linie $3R$ bildet. *d)* Durch R ziehe man eine Vertikale Rr' bis zur Durchschneidung mit dem isometrischen Grundrisse $3r'$. Hieraus ergibt sich die horizontale isometrische Projektion r' des Punktes R . *e)* Bestimmt man daher die Lage des Punktes r' in dem geometrischen Grundrisse (Fig. 2), so ergibt sich hiedurch zugleich die horizontale Projektion des Schattenpunktes R . *f)* Um endlich noch die vertikale Projektion dieses Schattenpunktes zu erhalten, ziehe man durch r' (Fig. 2) senkrecht auf die Grundlinie die Linie $r'r$, und trage die Höhe $Rr' = 3,3$ (Figur 3) von dem Durchschnittspunkte der Grundlinie nach r (Fig. 1) auf der Senkrechten $r'r$ auf.

Sind von den Punkten B' und C' (Fig 3) ihre horizontalen und vertikalen Projektionen b und c , sowie b' und c' auf gleiche Weise bestimmt, so werden die Verbindungslinien $b''b c'r'p'$ (Fig. 2) und $b''b'c'r p$ (Fig. 1) gezogen; die erstere bildet alsdann die horizontale und die zweite die vertikale Projektion der auf der schiefen Ebene befindlichen Gränzlinie ihres beleuchteten und unbeleuchteten Theiles.

Es ist wohl klar, dass durch diese Aufgabe nicht alle Fälle der Schattenlehre vertreten sein können, weil wir es nur mit solchen Körpern zu thun hatten, welche durchaus von Ebenen begrenzt sind. Indessen ist hier nicht der Ort auf alle Schwierigkeiten welche sich bei Schattenkonstruktionen darbieten können, näher einzugehen, und wir verweisen demnach auf die später folgenden angewandten Theile der geometrischen und isometrischen Projektionslehre.

—

FÜNFTER ABSCHNITT.

S T U D I E N.

ERSTES STUDIUM.

ISOMETRISCHE DARSTELLUNG EINES DURCH GEOMETRISCHE VERTIKAL- UND HORIZONTAL-DURCHSCHNITTE GEGEBENEN HEIZ- UND KOCHOFENS GEEIGNET FÜR WOH-
NUNGEN VON LANDLEUTEN UND TAGLÖHNERN.

(Taf. 18.)

Wir haben diese Aufgabe unter vielen anderen besonders deshalb gewählt, weil man sich durch diese von den Vorzügen der isometrischen Projektionslehre am besten überzeugen kann. Während nämlich sechs geometrische Durchschnitte die innere Einrichtung des Ofens, selbst nach längerer und aufmerksamer Betrachtung noch keineswegs klar machen, reicht ein Blick auf die isometrische Projektion Fig. 7 hin, um den Zusammenhang der vielen Rauchzüge vollkommen zu verstehen. Es geht aus dieser Ansicht zugleich hervor, dass man mit der isometrischen Darstellung eines Körpers um sich von der inneren Beschaffenheit desselben ins Klare zu setzen, fast gerade so verfahren kann, wie mit dem Körper selbst. Die Aussenflächen können ganz oder theilweise abgenommen, an beliebigen Stellen Oeffnungen angebracht und nach jeder gewünschten Richtung schickliche Einschnitte gemacht werden, bis man denjenigen Theil im Innern sieht, von dessen Lage und Beschaffenheit man sich genaue Kenntniss verschaffen will.

Zur Konstruktion der isometrischen Projektion (Fig. 7) wurde zunächst der Vertikaldurchschnitt Fig. 1 mit Hülfe der isometrischen Axen SC, SB und SA isometrisch dargestellt, durch alle entsprechenden Punkte dieses Durchschnit-tes mit der isometrischen Axe SC parallele Linien gezogen und die Länge derselben aus den horizontalen Durchschnitten Fig. 3—6 bestimmt.

Die Breite der Oeffnung 5 (Fig. 7) ergab sich aus Fig. 4, indem dieselbe gleich der Breite des Kanales 4 (Fig. 4) ist, während die Breite der Oeffnung 6, welche durch den Schieber *n* (Fig. 7) geschlossen werden kann, aus Fig. 5 bestimmt wurde.

Noch muss bemerkt werden, dass die Dimensionen der *isometrischen Linien* in den Figuren 7, 8 und 9 einem doppelt so grossen Maassstabe entsprechen, als diejenigen der Figuren 1—6.

Fig. 9 zeigt die Anlage der Vertiefungen *b, b* und des Durchzuges *c*, welche in Fig. 7 nicht sichtbar sind.

Fig. 8 stellt die Verbindung der Züge 2, 3 und 4 dar, welche durch eine kleine vertikale (punktirte) Wand auf der die oberste Platte aufrucht, von den Zügen 6 und *i* getrennt ist. *)

*) Die Konstruktion dieses Ofens verdankt man dem Ober-Bau-In-spektor Rudolph in Kassel, der die einzelnen Theile und die Vorzüge dieses Ofens auf folgende Weise beschreibt:

Fig. 6 ist der Grundriss des Ofens im Durchschnitt durch den Aschenfall und zwar (vergl. Fig. 7, 8 und 9) *a*) der Aschenfall, *b*) Vertiefungen zur Ersparung des Mauerwerks und Vermehrung der Wärmeflächen, *c*) durchgehende Oeffnung am Boden zur Erwärmung der durchströmenden Luft.

Fig. 5. Der Grundriss zunächst unter der Kochplatte im Durchschnitt durch die Feuerkammer, und zwar *d*) die Feuerkammer, ringsum mit liegenden Thon- und Backsteinen aufgemauert, mit *e*) dem eisernen Roste, und *f*) der Einheizöff-

ZWEITES STUDIUM.

ÜBER DIE AUFLÖSUNG DES ALLGEMEINSTEN FALLES DER GEOMETRISCHEN PROJEKTIONSLEHRE, NACH DER ZWEI-AXIG-ISOMETRISCHEN PROJEKTIONSMETHODE.

(Taf. 19.)

Der darzustellende Gegenstand ist ein Obelisk, dessen Grundriss in Fig. 2 und dessen Aufriss in Fig. 1 gegeben

nung, welche durch eine genau passende Thür von Eisenblech in einem eingemauerten eisernen Gerähme oder mit bloss eingemauerten Band- und Schliesshaken verschlossen wird; g) der Feuerheerd oder die sogenannte Brücke, mit ihrem bogenförmig ansteigenden Mauerwerk, hinter welchem der erste, abwärts fallende, Feuerzug 1 und hinter diesem der zweite aber aufwärts steigende Zug 2 liegt.

Fig. 4. Der Grundriss zunächst unter der Deckplatte und im Durchschnitt durch den Kochraum, und zwar h) der Kochraum mit seiner 21 Zoll im Quadrat grossen Kochplatte, nebst den von drei Seiten umliegenden Rauchzügen 2, 4, 5 und 6; i) eine verschliessbare Oeffnung in der Hinterwand des Kochraumes, wodurch entweder die hierin während des Kochens entstehenden Dämpfe für sich allein, oder wenn das Gemach nicht mit erwärmt, und wohl eher noch abgekühlt werden soll, zu welchem Zwecke das Feuer zum Kochen auf der Unterplatte angemacht werden muss, die Dämpfe von den Speisen mit dem Rauch von dem Kochfeuer zugleich abgeführt werden.

Fig. 3. Der Grundriss über der Deckplatte des Kochraumes im Durchschnitt nach *mn* mit der Ansicht von k) der vorderen und hinteren einfachen Bedeckung des Kochraumes und l) der Bedeckung der Rauchzüge 6 und 7, sowie des Dampf- und Rauchzugs i.

Fig. 1. Der Durchschnitt des ganzen Ofens nach der Länge.

Fig. 2. Der Durchschnitt nach der Breite in welchen beiden Ansichten dieselben Gegenstände, welche in den verschiedenen

ist: Die Richtung nach welcher der Gegenstand dargestellt werden soll, ist durch ihre beiden Projektionen SR und $S'R'$ (Fig. 1 und 2) gegeben.

Grundrissen bereits erklärt worden sind, eine gleichnamige Bezeichnung mit diesen erhalten haben.

Je nachdem nun dieser Kochofen dazu benutzt werden soll, um mittelst desselben *a*) neben der Zubereitung von Speisen, auch zugleich das Wohngemach in einem möglichst hohen Grade, oder *b*) nur in einem geringeren Grade, oder *c*) in der wärmeren Jahreszeit gar nicht zu erwärmen und wohl eher abzukühlen, muss für diese verschiedenen Fälle darauf gesehen werden, dass

a d) wenn die Zubereitung der Speisen und gleichzeitig die Erwärmung des Wohngemaches für die kältere Jahreszeit in einem hohen Grade beabsichtigt wird, sobald das Feuer unter der Kochplatte angemacht und der Zug hergestellt ist, die Verbindung des ersten mit dem sechsten Feuer- und Rauchzug, mittelst des mit *n* bezeichneten Schiebers von Eisenblech gänzlich abgeschlossen wird.

Das alsdann in der Feuerkammer *d* von dem Luftzuge durch den Rost *e* lebhaft angefachte Feuer fällt nunmehr über den Feuerheerd oder die Brücke *g* in den Zug 1 bis an den Boden herab, steigt in den Zug 2 aufwärts, und wird durch den Querszug 3 über die Decke des Kochraumes hin, in den Zug 4 bis auf die Kochplatte wieder abwärts, und von hier durch den Querszug 5 in den aufwärts steigenden Zug 6, und mit dem letzten Zug 7 endlich durch die Brandmauer *MM* in den Schornstein abgeführt. Damit übrigens der aus dem Querszug 5 in den aufwärts steigenden Zug 6 fortströmende heisse Rauch nicht zunächst in den letzten Zug 7 gelangt und somit weniger benutzt in den Schornstein entweicht, ist die Zunge *oo* eingelegt, hierdurch aber nicht allein der Querszug 5 verlängert, sondern auch dessen Ausmündung der Seitenwand des Ofens näher gebracht worden, wesshalb der Rauch nun auch noch diese erwärmen, und den aufwärts steigenden Zug 6 in seiner grössten Länge durchziehen muss, bevor solche den Abzug 7 in den Schornstein erreicht.

Die auszuführenden Konstruktionen, die wir zum genaueren Verständniss dieses wichtigen Theiles der Pro-

Eben so wird noch auf eine grössere Erwärmung des Wohngemaches hingewirkt, wenn der innerhalb des Kochraumes oberhalb in der Rückwand vorhandene sechs Zoll in Quadrat grosse Abzug *i* mittelst einer hierher gehörigen Eisenblechthüre verschlossen bleibt, da eine in derselben befindliche kleinere Oeffnung zur Ableitung der Speisedämpfe hinreichend ist, und mittelst einer Drehscheibe noch geregelt werden kann, indem die dadurch in dem Kochraume zurückgehaltene Wärme alsdann ebenfalls noch in das Gemach ausströmen muss.

bd) Wenn neben der Zubereitung der Speisen gleichzeitig die Erwärmung des Wohngemaches bei weniger kalter Witterung in einem weniger hohen Grade beabsichtigt wird, und zwar für etwa 3 Abstufungen, als:

1) Die Erwärmung in höheren Graden, so muss der zur Verbindung des ersten und sechsten Feuer- und Rauchzuges vorhandene Schieber *n* weniger oder mehr geöffnet, die Thür des Dampfzugs *i* in dem Kochraume aber geschlossen werden, indem alsdann das über die Brücke *g* in den Zug 1 überflammende Feuer wenig oder mehr, sogleich in den sechsten Zug aufwärts steigen und durch den Abzug 7 in den Schornstein entweichen muss, also nur noch der, nach Maassgabe jener durch den Schieber *n* abgemessenen Oeffnung, in die Zwischenzüge 2, 3, 4 und 5 einströmende heisse Rauch auf die Erwärmung des Ofens einwirken kann.

2) Die Erwärmung in geringerem Grade erfordert, dass eben dieser Schieber *n* gänzlich geöffnet, die Thüre des Dampfzuges *i* aber, wie vorher, geschlossen werde, indem nunmehr alles über die Brücke *g* in den Zug 1 überflammende Feuer, alsdann in den sechsten Zug aufwärts und weiter durch den Abzug 7 in den Schornstein entweichen muss, ohne dass jene Zwischenzüge nur irgend hierdurch erwärmt werden können.

3) Die Erwärmung in ganz geringem Grade setzt wieder voraus, dass dieser Schieber *n*, aber eben so wohl auch die Thüre des Dampfzuges *i* gänzlich geöffnet werde, indem dadurch gleichzeitig auch die in dem Kochraume *h* durch die

jektionslehre noch einmal detaillirt angeben wollen, sind nun der Reihe nach folgende.

starke Erhitzung der Unterplatte entwickelte Wärme-Ausströmung auf dem nächsten Wege in den Schornstein entweichen muss.

cd) Wenn die Zubereitung der Speisen in der wärmeren Jahreszeit keine Erwärmung des Wohngemaches zur Folge haben soll, und wohl eher dessen Abkühlung beabsichtigt wird, so müssen alle Feuerzüge unbenutzt bleiben, der Kochraum *h* also (was bei seiner hier angenommenen Höhe von $2\frac{3}{5}$ F. sehr wohl geschehen kann) gleichsam als offener Kamin gebraucht, mithin das Kochfeuer auf der Unterplatte des Kochraumes angemacht, der Rauch des Kochfeuers aber sowohl, wie die Dämpfe von den Speisen, durch die geöffnete Thüre des Abzugs *i* in den Schornstein abgeführt werden.

Der Ofen erhält bei diesem Gebrauch und mittelst der hierzu besonders angeordneten Einrichtung, ganz die Eigenschaft eines Kamins mit offenem Feuer, dessen heisser Rauch mit den Speisedämpfen nothwendig den Schornstein in einem hohen Grade erhitzen, mithin auch einen lebhaften Luftzug aus dem Zimmer zur Folge haben muss, und wenn nun die hierdurch aus demselben fortgeführte wärmere Luft, durch die Zulassung der kältern, je nach der Lage des Gemaches, entweder von Aussen durch die Fenster, oder aus dem Innern des Hauses ersetzt wird, so muss auch die Abkühlung eben dieses Gemaches hierdurch erfolgen.

Bei der Aufführung dieses Kochofens kann von einem alten Wandofen die Unterplatte zur Kochplatte, und die Oberplatte zur Deckplatte des Kochraumes benutzt werden. Es bliebe sodann nur noch ausser dem Roste von Gusseisen, der Feuer- und Abzugsthüre bei *f* und *i*, so wie dem Schieber von Eisenblech, (wenn nicht etwa noch zur Haltbarkeit des Mauerwerks in einigen der waagerechten Fugen Eisendräthe eingelegt werden sollen) die eiserne Schiene *p*, worauf der Mantel des Kochraumes liegt, neu anzuschaffen, wogegen alle übrigen Eisenplatten des alten Wandofens verkauft werden können. Nicht selten wird es auch der Fall sein, dass eine vorhandene

*I. Konstruktion des Quadrates *) welches den Grundriss des Obeliskens einschliesst, und dessen Diagonale mit der horizontalen Projektion (SR) der Richtung parallel ist.*

1) Man beschreibe aus dem Mittelpunkte der Figur einen beliebigen Kreis ABCD.

2) Man ziehe parallel mit RS den Durchmesser rq , errichte auf diesem die Senkrechte tu und ziehe die Linie rt .

3) Durch die Punkte B und D ziehe man mit rt die Linie I,IV und II,III parallel, und durch C und A senkrecht auf diese die Linien III,IV und I,II.

Auf solche Weise wird man in diesem speziellen Falle ein Quadrat I, II, III, IV, in anderen Fällen aber ein Rechteck erhalten, in welchem die Halbirungslinien zweier gegenüberliegender rechter Winkel mit RS parallel sind, eine Bedingung die vor allen anderen erfüllt werden muss.

II. Konstruktion des Winkels welchen die zwei-axig-isometrischen Linien mit einander bilden müssen, wenn sie den senkrechten Linien der geometrischen Projektion, welche mit den Seiten II,III und III,IV (Fig. 2) parallel sind, entsprechen sollen.

(Fig. 3 und 4.)

1) Man ziehe AC (Fig. 4) parallel mit RS (Fig. 2), errichte in der Mitte von AC, deren Länge beliebig sein kann, die Senkrechte BD und konstruiere das Quadrat ABCD.

alte Ofenthüre eine der unter i und f bezeichneten neuen wird ersetzen, so wie statt des eisernen Schiebers und Rostes ein Ziegel wird eingeschoben, und dieser von Backsteinen aufgeführt werden können.

*) In den häufigsten Fällen erhält man statt des Quadrates ein Rechteck.

2) Aus dem Mittelpunkte des Quadrates und aus A fälle man senkrecht auf die Grundlinie die beiden Hülfslinien $B'D'S'h''$ und Aah . Hieraus ergibt sich auf der Grundlinie der Punkt S' .

3) Man ziehe durch S' parallel mit $R'S'$ (Fig. 1) die Linie $S'R'$ (Fig. 3) welche die Senkrechte Aah in h durchschneidet, und so die Linie ah bestimmt.

4) Man betrachte das Quadrat ABCD (Fig. 4) als die Grundfläche einer regelmässigen vierseitigen Säule dessen Höhe $= ah$ ist, und drehe dieselbe um den Mittelpunkt ihrer Grundfläche so lange bis die Diagonale AC nach $A'C'$ fällt und mit der Grundlinie parallel ist. Die Höhe ah der Säule wird alsdann nach $a'h'$ und folglich die Linie $S'h$ nach $S'h'$ fallen.

5) Man drehe die vierseitige Säule so lange um die Diagonale $B'D'$ bis die Linie $S'h'$ in der Lage $S'h''$ auf der Grundlinie senkrecht steht, so dass die Höhenkante $a'h'$ nach $h''III'$ fällt. Die horizontale Projektion des Punktes III' muss sich alsdann in III befinden, und die von h'' in der Mitte von $A'C'$, während die Punkte D' und B' ihre Lage unverändert beibehalten haben. Die horizontalen Projektionen der Seiten $A'D'$ und $A'B'$ sind daher die Verbindungslinien $III D'$ und $III B'$, und der gesuchte Winkel der zweiaxig-isometrischen Linien der Winkel $D'III B'$.

III. Konstruktion des Höhenmaassstabes (Fig. 5).

1) Man trage die Seite AB des Quadrates ABCD (Fig. 4) von III nach II *) und ziehe durch II parallel mit $B'D'$ die Linie III II.

*) Der Druck der Tafeln war schon vollendet als bemerkt wurde dass die Seite III II nicht der Seite AB in Figur 4, sondern der

2) Man ziehe (Fig. 5) eine Linie $066'$, nehme die Höhe ah (Fig. 3) in den Zirkel, trage diese aus dem Punkte o beliebig oft (z. B. sechsmal von 0 nach 6) auf, und verfähre alsdann eben so mit der etwas grössern Linie $III\ II$ (Fig. 4), welche daher aus dem Punkte 0 sechsmal aufgetragen wird.

3) Ueber der Linie 06 konstruiere man das gleichseitige Dreieck $06m$ und verbinde endlich den Punkt m mit dem Punkte $6'$. Hieraus ergibt sich der Höhenmaassstab $om6'$.

IV. Konstruktion der zweiaxig-isometrischen Projektion des Obeliskens selbst.

Alle isometrische Dimensionen sind nach einem doppelt so grossen Maassstabe aufgetragen als diejenigen in Fig. 1 und 2.

1) Man konstruiere ein Rhombus I, II, III, IV (Fig. 7), welches den in Fig. 4 gefundenen isometrischen Winkel II, III, IV einschliesst und dessen Seiten I, IV und I, II zweimal so gross sind als diejenigen des den Grundriss umschliessenden Quadrates I, II, III, IV .

2) Man nehme die Linien $II\ A$ und $II\ D$ (Fig. 2) und trage dieselben zweimal von II nach A und D (Fig. 7); ebenso trage man $IV\ B$ und $IV\ C$ (Fig. 2) zweimal nach B und C (Fig. 7), und verbinde die aufeinander folgenden Punkte A, B, C und D durch gerade Linien. Hieraus ergibt sich ein Parallelogramm welches die Grundfläche des Obeliskens bildet.

Seite $III\ II$ in Fig. 2 gleich sei. Dieser Fehler der die Höhen verhältnissmässig grösser macht als sie sein sollten, wurde durch die Meinung veranlasst, dass das Quadrat $I\ II\ III\ IV$, (Fig. 2) welches beliebig gross angenommen werden kann, dem Quadrate $ABCD$ gleich sei. Uebrigens kann dieser Irrthum zu keinem Missverständnisse beitragen.

3) Man beziehe die Hauptlinien des Grundrisses (Fig. 2) auf die Seiten des dieselben umschliessenden Quadrates durch die Konstruktion der Hülfslinien $1a$, $2b$, $3c$, $4d$ und $5e$, welche die Verlängerungen entsprechender Seiten der den Grundriss bildenden Quadrate sind.

4) Man ziehe (Fig. 7) die Diagonalen AC und BD, trage die Linien Aa , Ab , Ac . . . (Fig. 2) nach Aa , Ab , Ac . . . (Fig. 7) und ziehe durch die erhaltenen Punkte parallel mit AD die Hülfslinien $a1$, $b2$, $c3$, $d4$ und $e5$. Hierdurch ergeben sich die auf der Diagonale AC befindlichen Punkte 1, 2, 3, 4 und 5.

5) Mitteltst dieser und mit Hülfe des Satzes: dass parallele und gleich grosse Linien auch parallele und gleich grosse Projektionen besitzen, vollende man den isometrischen Grundriss.

6) Man ziehe eine Linie Lg (Fig. 7) welche den Winkel $IV\ I\ III$ des isometrischen Rhombus halbt, und daher die *Höhenaxe* der Projektion bildet.

7) Man errichte in allen Punkten des Grundrisses vertikale Linien, nehme ihre Höhen aus Fig. 1 ab, vergrößere diese mit Hülfe des Maassstabes Fig. 5 in dem entsprechenden Verhältnisse und trage die so vergrößerten Höhen auf die entsprechenden Vertikalen in Fig. 7 zweimal auf.

Die Konstruktion zur Bestimmung irgend eines Punktes M (Fig. 7) ist daher folgende:

a) Man errichtet in der horizontalen Projektion m eine Vertikale.

b) Man beschreibt mit der Höhe $m'm''$ (Fig. 1) aus dem Scheitelpunkte m des Maassstabes (Fig. 5) einen Kreisbogen $m'm'$, zieht die Verbindungslinie $m'm'm''$, und trägt die vergrößerte Höhe $m'm''$ zweimal von m nach M.

Auf gleiche Weise verfährt man zur Bestimmung der übrigen Punkte.

V. *Bestimmung der wahren Grösse der in einer zweiachsig-isometrischen Projektion vorkommenden Linien.*

1) Bestimmung der im Grundrisse vorkommenden Linien AD und $s r$.

a) Zur Bestimmung von AD konstruiere man (Fig. 8) zwei senkrechte Linien II A und II D, trage die isometrischen Linien II A und II D (Fig. 7) nach II A und II D (Fig. 8) und ziehe die Verbindungslinie AD. Diese bestimmt die wahre Grösse der Linie AD (Fig. 7).

b) Zur Bestimmung von $s r$ ziehe man durch r parallel mit der isometrischen Axe I IV die Linie $r p$, und durch s parallel mit der isometrischen Axe I, II die Linie $s p$, konstruiere (Fig. 9) zwei senkrechte Linien, trage die isometrische Linien $r p$ und $s p$ (Fig. 7) nach $r R$ und $r t$ (Fig. 9) und ziehe die Verbindungslinie $R t$.

2) Bestimmung der im Raume befindlichen Linie RS.

a) Man trage die Höhe ($R r$) des tieferliegenden Punktes r auf die Höhe des höheren Punktes S von s nach t , und ziehe die Linie $R t$. Diese Linie ist gleich und parallel mit $s r$ (der horizontalen Projektion der Linie SR) und bildet mit der vertikalen Linie $S t$ ein isometrisch-rechtwinkliches Dreieck $R S t$.

b) Man bestimme die wahre Grösse von $R t = s r$. (S. oben unter 1 b.)

c) Man bestimme die wahre Grösse von $S t$ mittelst des Maassstabes (Fig. 6) *), indem man mit $S t$ aus o den Bogen $S t$ beschreibt und die Senne $S t$ zieht.

*) Dieser Maassstab wurde aus dem Maassstabe Fig. 5 dadurch abgeleitet, dass mit der Linie $06'$ (Fig. 5) ein erster Kreisbogen

d) Man errichte über der wahren Länge von tR (Fig. 9) eine Senkrechte, trage auf dieser die Senne St (Fig. 6) auf und ziehe die Verbindungslinie RS .

Diese bestimmt sodann die wahre Grösse von RS .

und aus dem Durchschnittspunkte 6 (Fig. 6) mit 06 (Fig. 5) ein zweiter Kreisbogen beschrieben wurde; alsdann wurde die Verbindungslinie 06 gezogen.

I N H A L T.

ERSTER ABSCHNITT.

	Seite
Vorkenntnisse.	
<i>Zusammenstellung der wichtigsten Konstruktionen in der Ebene</i>	9
Bezeichnungweise der Linien	9
Konstruktion senkrechter Linien	10
Theilung der Linien	11
Theilung der Winkel und der Kreisbögen	13
Auftragung eines gegebenen Winkels	13
Konstruktion paralleler Linien	14
Konstruktion der Dreiecke	15
Konstruktion parallelogrammartiger Vierecke	17
Proportionallinien	18
Konstruktion ähnlicher Vielecke	19
Konstruktion regelmässiger Vielecke	23
Aufgaben über den Kreis	25
Konstruktion einer Ellipse und ihrer Tangenten	32

ZWEITER ABSCHNITT.

Geometrische und isometrische Projektionslehre	35
--	----

ERSTES KAPITEL.

<i>Hauptsätze der Projektionslehre</i>	35
Gegenstand der Projektionslehre	35
Von den Eigenschaften der Projektionen eines Punktes	36
Projektionen der Linien	38
Darstellung verschiedener Lagen einer geraden Linie zwischen den beiden Projektionsebenen	40
Projektionen der Ebenen	42

ZWEITES KAPITEL.

<i>Zusammenstellung der wichtigsten Flächen und Körper. Ihre Erzeugung. Ihre Eigenschaften</i>	48
Pyramiden	48
Prismen oder Säulen	52
Kegelflächen	54
Zylinderflächen	56
Umwälzungsflächen	57
Schraubenlinie, Schraubenfläche und Schraubenkörper	61
Aufgaben zur Übung	62

DRITTES KAPITEL.

<i>Geometrische und isometrische Projektionen rechtwinklich be- gränzter Körper.</i>	73
Princip der isometrischen Projektionslehre	79
Streng-mathematische Begründung des Principes der isometri- schen Projektionslehre	86
Übungsaufgaben über die Konstruktion der isometrischen Pro- jektionen rechtwinklich begränzter Körper, deren geometri- sche Projektionen gegeben sind	93

VIERTES KAPITEL.

<i>Konstruktion der geometrischen und isometrischen Projektionen schiefwinklich begränzter Körper</i>	98
Zweifache Drehung eines unregelmässigen fünfseitigen senkrechten Prima's. Konstruktion seiner isometrischen Projektion. .	98
Geometrische und isometrische Projektion einer ganzen und einer schiefabgestumpften sechsseitigen Pyramide. Bestimmung der wahren Grösse isometrisch dargestellter Linien	104
Beispiele zur Uebung über die Bestimmung d. wahren Grösse etc.	109

FÜNFTES KAPITEL.

<i>Regelmässige Körper. Auflösung eines besonderen Falles in der isometrischen Projektionslehre.</i>	112
--	-----

SECHSTES KAPITEL.

<i>Isomet. Projektion eines Kreises u. krummer Linien überhaupt</i>	119
Isometrische Darstellung eines Kreises, welcher sich in der horizontalen Projektionsebene befindet.	120
Isometrische Darstellung eines Kreises, wenn sich derselbe im Raume befindet	126
Isometrische Darstellung von Ellipsen	129
Isometrische Darstellung krummer Linien überhaupt	130
Eintheilung einer gegebenen Ellipse in eine beliebige Anzahl gleicher Theile	130
Einige Bemerkungen zur theoretischen Begründung der vorhergehenden Konstruktionen	133

SIEBENTES KAPITEL.

<i>Zylinderflächen</i>	134
----------------------------------	-----

ACHTES KAPITEL.

<i>Kegelflächen</i>	138
<i>Umwälzungsflächen</i>	143

DRITTER ABSCHNITT.

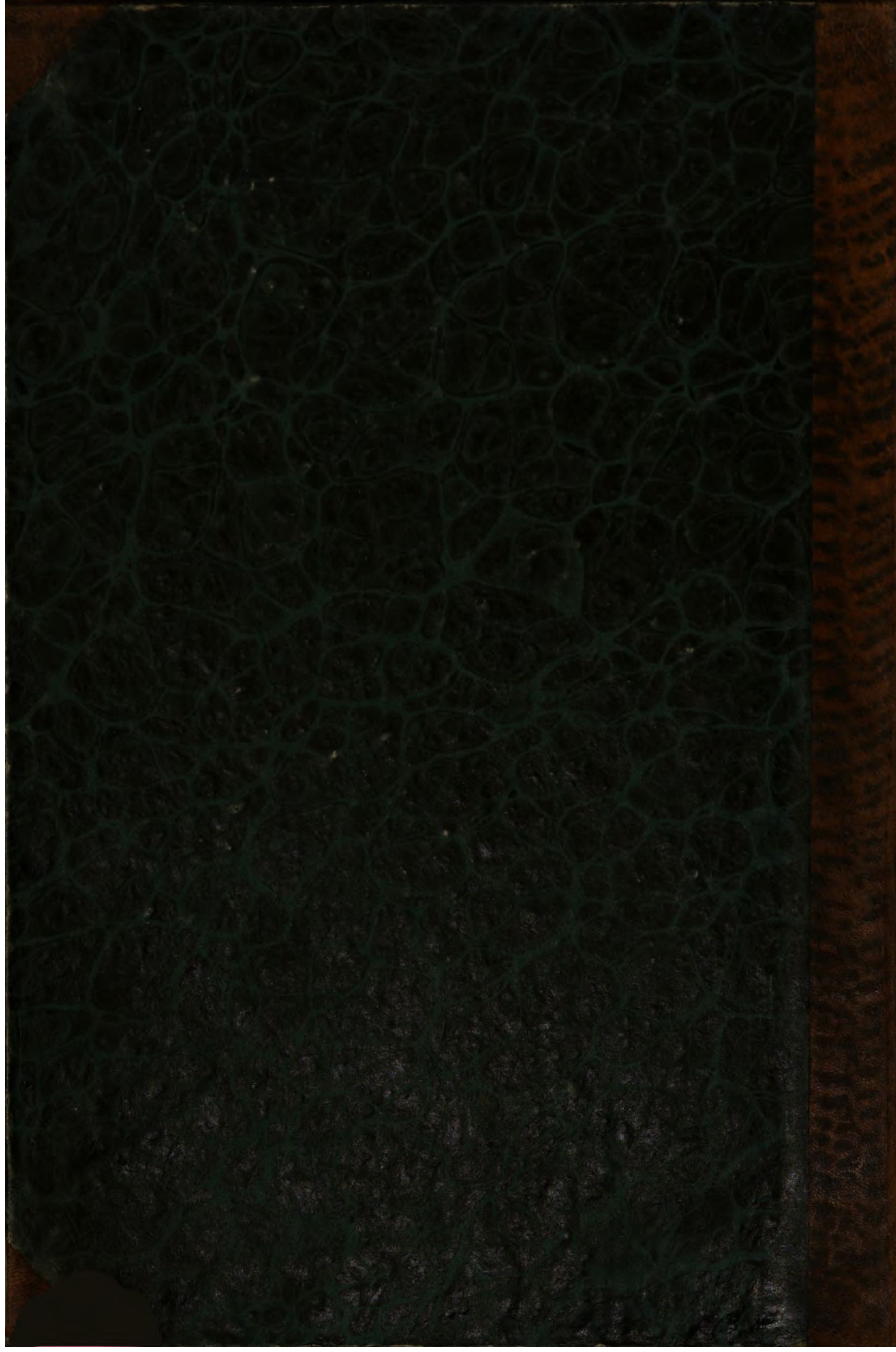
Auflösung des allgem. Falles der geomet. Projektionslehre nach dem Princip der isomet. Projektionslehre, oder: Von den zweiartig-isometrischen Projektionen	151
---	-----

VIERTER ABSCHNITT.

Anwendung d. isomet. Projektionslehre auf d. Bestimmung d. Schattens u. d. Beleuchtung eines Körpers	159
--	-----

FÜNFTER ABSCHNITT.

Studien	167
ERSTES STUDIUM. <i>Isometrische Darstellung eines durch geometrische Vertikal- und Horizontal-Durchschnitte gegebenen Heiz- und Kochofens geeignet für Wohnungen von Landleuten und Tagelöhnern.</i>	167
ZWEITES STUDIUM. <i>Darstellung eines Obeliskens nach der zweiartig-isometrischen Projektionsmethode</i>	169



Möllinger, Otto

Isometrische Projektionslehre (Perspective) ; wiss. begründet u. in ihrer
Anwendung auf d. Techn. Zeichnen

Bd.: 1. Theoretischer Theil. - 1840. - VIII, 180 S.

Solothurn 1840

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.5302(1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112232-0